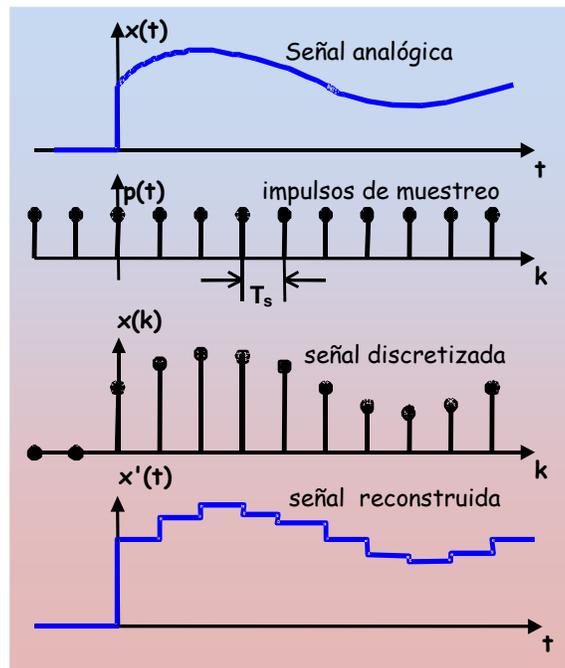


**Facultad de Ingeniería Eléctrica**  
**Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo**

Apuntes para el Curso

# Procesamiento Digital de Señales



Elaboró: José Juan Rincón Pasaye

Junio de 2009

# PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES I

## Prerrequisitos CB0003-T (Cálculo IV)

### Programa Desarrollado:

- 1. Introducción (8 horas)**
    - 1.1. Definiciones de señales, sistemas y procesamiento de señales
    - 1.2. Clasificación de las señales
      - 1.2.1. Señales continuas y señales discretas
      - 1.2.2. Señales determinísticas y señales aleatorias
      - 1.2.3. Señales periódicas y no-periódicas
    - 1.3. Concepto de frecuencia en señales continuas y discretas en el tiempo
      - 1.3.1. Frecuencias negativas y fasores
      - 1.3.2. Señales sinusoidales en tiempo discreto
      - 1.3.3. Propiedades de las señales sinusoidales en tiempo discreto
      - 1.3.4. Frecuencias negativas y fasores en tiempo discreto
    - 1.4. Conversión analógico-digital y digital-analógico
      - 1.4.1. Muestreo de señales analógicas
      - 1.4.2. Relación entre frecuencia de tiempo continuo y de tiempo discreto
      - 1.4.3. Confusión de frecuencia o Aliasing
    - 1.5. El teorema fundamental del muestreo
  - 2. Señales y Sistemas en Tiempo Discreto (10 horas)**
    - 2.1. Señales en tiempo discreto
    - 2.2. Representación de señales en tiempo discreto
    - 2.3. Señales de tiempo discreto típicas
    - 2.4. Operaciones simples con señales de tiempo discreto
    - 2.5. Sistemas en tiempo discreto
    - 2.6. Descripción entrada-salida
    - 2.7. Diagramas de bloques de sistemas en tiempo discreto
    - 2.8. Propiedades de los sistemas
    - 2.9. Sistemas con y sin memoria
    - 2.10. Causalidad
    - 2.11. Estabilidad
    - 2.12. Invariancia en el tiempo
    - 2.13. Linealidad
    - 2.14. Análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo
    - 2.15. Descomposición de una señal discreta en términos de impulsos
    - 2.16. Respuesta de un DSLIT a entradas arbitrarias: La convolución
    - 2.17. Respuesta al impulso de sistemas causales
    - 2.18. Respuesta al impulso y estabilidad
    - 2.19. Sistemas FIR y sistemas IIR
    - 2.20. Ecuaciones de diferencias para un DSLIT y su solución
    - 2.21. Solución homogénea de la ecuación de diferencias de un DSLIT
    - 2.22. Solución particular de la ecuación de diferencias de un DSLIT
    - 2.23. Solución total de la ecuación de diferencias de un DSLIT
    - 2.24. Transformada Z
      - 2.24.1. Definiciones. Transf. Z unilateral y bilateral, Región de convergencia.
      - 2.24.2. Propiedades: (linealidad, y corrimiento en el tiempo)
      - 2.24.3. Función de transferencia en Z de un DSLIT.
- (Primer examen parcial, 2 horas)**
- 3. Análisis en el Dominio de la Frecuencia (10 horas)**
    - 3.1. Introducción
    - 3.2. Análisis frecuencial de señales de tiempo continuo (Repaso)
    - 3.3. Serie de Fourier
    - 3.4. Forma trigonométrica de la serie de Fourier
    - 3.5. Forma exponencial de la serie de Fourier
    - 3.6. El espectro de frecuencias
    - 3.7. Serie de Fourier para un tren de pulsos rectangular periódico
    - 3.8. La transformada de Fourier de una señal continua
    - 3.9. Análisis frecuencial de señales discretas en el tiempo
    - 3.10. Serie de Fourier para señales de tiempo discreto (DTFS)

- 3.11. Serie de Fourier de un tren de pulsos rectangular periódico discreto
  - 3.12. Transformada de Fourier para señales de tiempo discreto (DTFT)
  - 3.13. Transformada de Fourier de un pulso rectangular discreto no-periódico
  - 3.14. Relación entre la DTFT y la Transformada Z
  - 3.15. Clasificación de señales en el dominio de la frecuencia. El concepto de ancho de banda.
  - 3.16. Rangos de frecuencia de algunas señales en la naturaleza
  - 3.17. Respuesta a la frecuencia de sistemas DSLIT.
  - 3.18. Análisis de sistemas DSLIT como filtros digitales de frecuencia selectiva
  - 3.19. Filtros ideales
  - 3.20. Filtros pasa-bajas, pasa-altas y pasa-banda
  - 3.21. Resonadores digitales
  - 3.22. filtros ranura
  - 3.23. Filtros peine
  - 3.24. Filtros pasa-todo
  - 3.25. Osciladores sinusoidales digitales
  - 3.26. Deconvolución y sistemas inversos
- 4. La Transformada Discreta de Fourier (10 horas)**
    - 4.1. Muestreo en el dominio de la frecuencia
    - 4.2. Definición de la Transformada Discreta de Fourier (DFT)
    - 4.3. Propiedades de la DFT
    - 4.4. Propiedades de Periodicidad, linealidad y simetría.
    - 4.5. La DFT como matriz de transformación
    - 4.6. Análisis en la frecuencia de señales usando la DFT
    - 4.7. El efecto de derrame y el efecto de la limitación del número de muestras
    - 4.8. Métodos de filtrado lineal basados en la DFT

### (Segundo examen parcial, 2 horas)

- 5. Transformada Rápida de Fourier (8 horas)**
  - 5.1. Algoritmos para el cálculo eficiente de la DFT
  - 5.2. Cálculo directo de la DFT
  - 5.3. Metodología "divide y vencerás" para el cálculo de la DFT
  - 5.4. Algoritmos FFT de base 2
  - 5.5. Comparación de los algoritmos FFT
- 6. Diseño de Filtros digitales (12 horas)**
  - 6.1. Consideraciones generales
  - 6.2. Causalidad y sus implicaciones
  - 6.3. Características de filtros digitales prácticos
  - 6.4. Diseño de filtros FIR
  - 6.5. Filtros FIR simétricos y antisimétricos
  - 6.6. Diseño de filtros FIR de fase lineal usando ventanas
  - 6.7. Diseño de filtros FIR de fase lineal mediante muestreo en frecuencia
  - 6.8. Diseño de filtros óptimos FIR de fase lineal y rizado constante
  - 6.9. Diseño de filtros IIR a partir de filtros analógicos
  - 6.10. Diseño de filtros IIR mediante la aproximación de derivadas
  - 6.11. Diseño de filtros IIR mediante invarianza de la respuesta al impulso
  - 6.12. Diseño de filtros IIR mediante transformación bilineal
  - 6.13. Diseño de filtros digitales basados en el método de mínimos cuadrados.

### (Tercer examen parcial, 2 horas)

#### Bibliografía:

Texto principal:

"Procesamiento Digital de Señales: Principios, Algoritmos y Aplicaciones". John G. Proakis y Dimitris G. Manolakis. Editorial Prentice Hall. Tercera Edición.

Revisó (Agosto de 2009): José Juan Rincón Pasaye

# Capítulo 1.

## Introducción

El procesamiento digital de señales ha conllevado tremendos cambios desde su surgimiento en la década de los setentas. Estos cambios han sido tanto de carácter teórico como tecnológico. Conviene aquí mencionar algunas de los intereses principales del área a lo largo de su evolución:

En los primeros años el principal interés en este campo era el desarrollo de algoritmos para la *Transformada Rápida de Fourier* y el diseño de *filtros digitales*. Actualmente un profesional de vanguardia en el área debe poseer una buena formación en diversas áreas, tales como: *Teoría de la aproximación, procesos estocásticos, teoría de matrices y sistemas dinámicos* por mencionar sólo algunas. Aunque a primera vista estos tópicos parecieran ser cosa de investigadores académicos, es una realidad el hecho de que un ingeniero actual en el área continuamente tiene que diseñar sistemas de *filtraje óptimo, filtraje adaptivo y estimación espectral*. De manera que los tópicos mencionados se han colado en la formación básica del área.

Actualmente, se considera que un curso introductorio en procesamiento digital de señales debe cubrir por lo menos los siguientes tópicos: *transformada Z, respuesta al impulso, convolución, respuesta a la frecuencia, el teorema del muestreo, transformada discreta de Fourier*, algoritmos de *transformada rápida de Fourier, diseño de filtros de respuesta finita al impulso (FIR) y diseño de filtros de respuesta infinita al impulso (IIR)*. Es importante mencionar que dado que estos temas son bien conocidos, existe ya un buen número de paquetes de software que manejan este material estándar (por ejemplo, MATLAB) y que pueden servir como un soporte paralelo a estas notas, sobre todo en cuanto a ejercicios de tipo numérico y gráfico.

### Aplicaciones.

Resultaría muy extenso dar una lista exhaustiva de las aplicaciones y los frutos que ha logrado el procesamiento digital de señales, mencionaremos aquí más bien cinco contextos en los cuales se pueden encontrar éstas aplicaciones:

- Un primer conjunto de aplicaciones concierne al problema de diseñar un sistema para procesamiento de señales y *predicción* del comportamiento futuro. El *pronóstico* económico presenta un ejemplo común de esta situación, por ejemplo, muchos programas de computadora han sido realizados para realizar análisis detallados de los promedios del índice bursátil (y de otras señales económicas) y realizar predicciones en base a la historia de estas señales. Si bien, la mayor parte de estas señales no son totalmente predecibles, es un hecho importante el que su comportamiento futuro sí puede ser predicho, al menos aproximadamente y dependiendo de la técnica de análisis utilizada en la predicción.
- Un segundo conjunto de aplicaciones es la *restauración de señales* que han sido degradadas de alguna manera. Por ejemplo, la *restauración de grabaciones de audio* antiguas. Otro ejemplo de este tipo de procesamiento se tiene cuando se quiere depurar una señal de audio

que se recibe con ruido de fondo, por ejemplo, en la transmisión de un piloto a la torre de control de tráfico aéreo, la voz del piloto estará contaminada con el ruido de fondo de la cabina del avión, en este caso se debe diseñar un sistema para eliminar el ruido de fondo y resaltar la voz del piloto.

- Un tercer conjunto de aplicaciones muy similar al anterior, es el procesamiento de señales con el objetivo de "mejorar" o resaltar alguna característica de ellas. El *procesamiento de imágenes* provenientes de satélite es un caso típico. Así, además de la restauración que necesariamente se practicará sobre la imagen para compensar errores debido a limitaciones del equipo, efectos atmosférico y hasta errores en la transmisión, es posible procesar al señal de manera que se realcen características deseadas de la imagen, tales como: cauces de ríos, o lagos, regiones cultivadas, isotermas, etc. o bien, se puede realizar la amplificación de una porción deseada de la imagen, o la "traslación" de la imagen infrarroja a luz visible (para visión nocturna), etc.
- Un conjunto de aplicaciones que ha tenido un gran desarrollo en los últimos años ha sido el *reconocimiento de patrones*. Éste se refiere al procesamiento de un conjunto de señales de la misma naturaleza con el fin de clasificarlas o de "identificar" cada una de ellas dentro de una categorización dada. Así, se puede mencionar en este campo, el reconocimiento de voz, la clasificación de piezas mecánicas en una línea de producción por un brazo mecánico, el reconocimiento óptico de caracteres (OCR), el reconocimiento de huellas digitales, de firmas, de rostros o de manos, etc.
- Otra clase importante de aplicaciones se tiene cuando se desea modificar las características de comportamiento de un sistema dado, normalmente a través de la manipulación de señales de entrada específicas, o combinando el sistema dado con otros sistemas. Este es el campo denominado *control automático*. Por ejemplo, un área referida normalmente como *control de procesos*, la cual se refiere al control de plantas químicas. En esta clase de aplicaciones, un conjunto de sensores miden las señales físicas como temperatura, humedad, concentraciones químicas, etc. dichas señales son procesadas por un sistema encargado de manipular las señales de control (tales como flujo de combustible o agua de enfriamiento, dosificación de sustancias, etc.) para regular el proceso químico en marcha.

Ciertamente, la lista no es exhaustiva y no es fácil clasificar toda la gama de aplicaciones que tiene este campo, es importante sin embargo mencionar otras aplicaciones que han recibido gran impulso por el desarrollo del procesamiento digital de señales, tal es el campo de las *comunicaciones electrónicas* modulación de señales, transmisión y recepción en AM y FM, microondas, comunicación por fibra óptica, la compresión y el encriptamiento de señales, etc. O el campo de la síntesis de señales como: sintetizadores musicales, síntesis de voz, etc.

### **1.1. Definiciones de señales, sistemas y procesamiento de señales**

Los conceptos de señales y sistemas aparecen en una amplia variedad de campos, de manera que las ideas y técnicas asociadas con estos conceptos juegan un papel importante en áreas tan diversas como: comunicaciones, aeronáutica y astronáutica, diseño de circuitos, acústica, óptica,

sismología, ingeniería biomédica, sistemas de generación y distribución de energía, control de procesos, reconocimiento de patrones, etc.

En general **las señales** contienen información acerca de la naturaleza o comportamiento de algún fenómeno, **los sistemas** son elementos que transforman señales, es decir, un sistema recibe señales de entrada, ejecuta algún procedimiento sobre éstas y produce señales de salida. Esta relación entre señales y sistemas puede ser representada de manera general en un bloque como en la figura 1.1



**Figura 1.1** Diagrama de bloques de un sistema en general

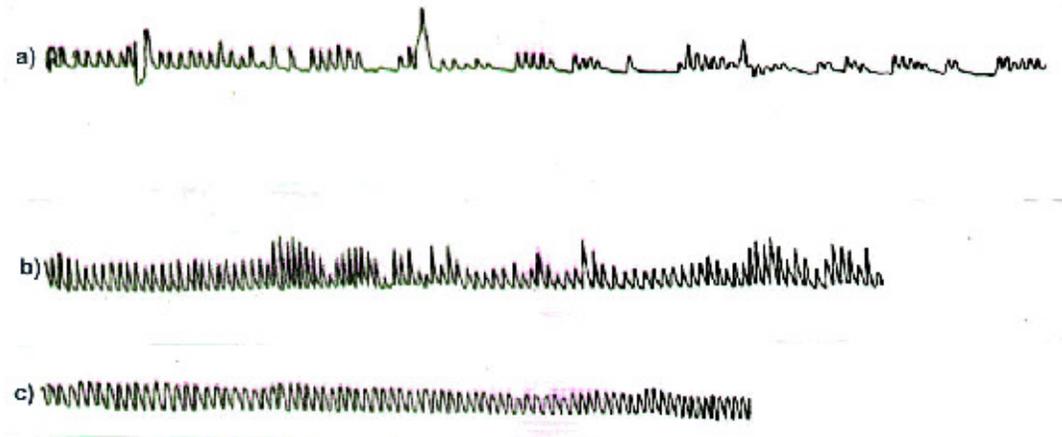
- Los voltajes y corrientes como funciones del tiempo aplicados a un circuito son ejemplos de señales y el circuito en sí es ejemplo de un sistema, el cual responderá a su vez con voltajes y corrientes dependiendo de los que le son aplicados.
- Cuando el conductor de un automóvil presiona el acelerador, el automóvil responde incrementando su velocidad, en este caso, el automóvil es el sistema, la presión sobre el acelerador es una señal de entrada y la velocidad del automóvil es una señal de salida.
- Un programa de computadora para el diagnóstico de electrocardiogramas puede ser considerado como un sistema que recibe como entrada la señal digitalizada de un electrocardiograma y produce como salida estimaciones sobre parámetros tales como ritmo cardiaco, etc.

A continuación se introduce una descripción y representación matemática de señales y sistemas que nos permitirá involucrar los conceptos intuitivos básicos y fomalizarlos para posteriormente obtener herramientas de análisis y diseño.

### 1.1.1.- Señales

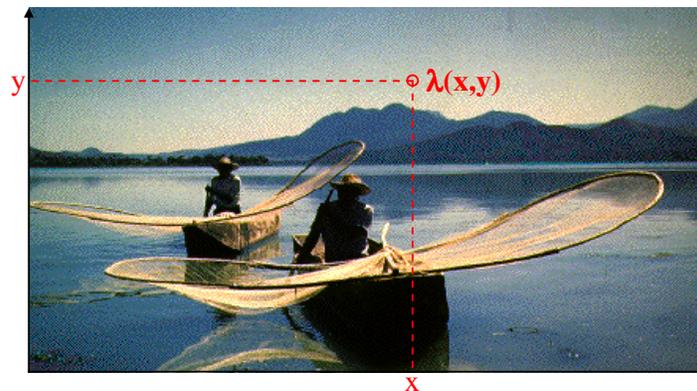
En general una **señal** es cualquier cantidad cuya magnitud se puede representar matemáticamente como función de una o más variables independientes. En este curso se tratará exclusivamente el caso de funciones de una variable independiente y esta variable normalmente será el tiempo, aunque en algunas aplicaciones como en la geofísica interesa el comportamiento de la densidad, porosidad, resistividad eléctrica (por ejemplo) con respecto a la profundidad, o en la meteorología, interesa la variación de la presión, velocidad del viento, humedad (por ejemplo) respecto a la altitud.

Por ejemplo, en la figura 1.2 se muestra la evolución de la respiración en un individuo con insomnio prolongado tratado con *electrosueño* (sueño inducido eléctricamente). A este tipo de diagrama se le llama *pneumograma* y representa las variaciones en el caudal del aire respirado por el paciente al transcurrir el tiempo.



**Figura 1.2** Pneumograma de un paciente de insomnio tratado con electrosueño. a) Principio de la aplicación de los estímulos (a los 20 segundos de de aplicar la corriente aparece un ritmo periódico de respiración). b) El paciente empieza a dormirse. c) el paciente está dormido (la respiración se hace regular). (Adaptado de *Electrosueño*. V. A. Guiliarovski, et al, Moscú, 1961)

Un ejemplo de una señal cuya magnitud depende de dos variables independientes es la figura 1.3 en la cual se muestra un imagen fotográfica, la cual se puede considerar como una representación de las variaciones del color (longitud de onda  $\lambda$ ) respecto a la posición horizontal ( $x$ ) y vertical ( $y$ ).



**Figura 1.3** Una imagen plana puede considerarse como una señal bidimensional

## 1.2 Clasificación de las señales

Además del número de variables independientes del que dependen, las señales se pueden clasificar (independientemente de su naturaleza física) de acuerdo a sus propiedades básicas como sigue

### 1.2.1 Señales continuas y señales discretas

Existen dos tipos básicos de señales dependiendo de la naturaleza de la variable independiente (tiempo) que consideran: Señales de *tiempo continuo* y señales de *tiempo discreto*.

- ✎ En una **señal de tiempo continuo**  $x(t)$ , la variable tiempo es una variable continua y por ello estas señales están definidas para cualquier par de instantes de tiempo y para cualquier instante comprendido entre este par. Para este tipo de señales usaremos  $t$  para denotar a la variable independiente de tiempo continuo. La figura 1.2 es un ejemplo de señales de tiempo continuo.
- ✎ Por otro lado, una **señal de tiempo discreto**  $x(k)$  solamente está definida en ciertos instantes discretos de tiempo, de manera que entre cada instante y el siguiente no está definida dicha señal.

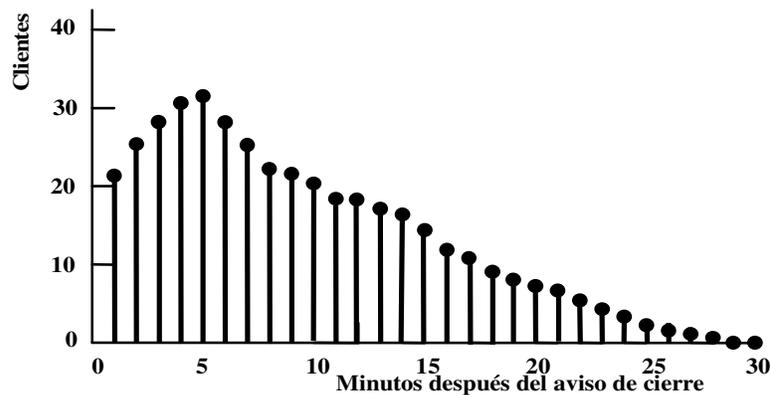


Figura 1.4 Ejemplo de señal de tiempo discreto

- ✎ Una señal de tiempo discreto por lo tanto también se puede representar como una lista o **secuencia de valores**  $\{x(1), x(2), x(3), \dots\}$ . En este tipo de señales usaremos  $n$  para denotar la variable independiente.

Son ejemplos típicos de una señal de tiempo discreto: Los índices del mercado de valores, el censo de población anual, el índice de desempleo, o bien (ver figura 1.4), el número de clientes que quedan haciendo fila en las cajas de salida en el interior de una tienda minutos después del aviso de cierre de la tienda.

El *conjunto de valores* que puede tomar una señal de tiempo continuo o de tiempo discreto también se debe distinguir para su clasificación:

- ✎ Si una señal puede tomar cualesquier valor entre dos valores dados, se dice que es una *señal continua* de lo contrario se dice que es una *señal discreta*. Una señal discreta y de tiempo discreto se denomina *señal digital*.

**Ejemplo:** El ejemplo de la figura 1.4 representa una señal digital si solamente se tiene la información del número de personas cada minuto, sin embargo, se podría hacer una medición continua del número de personas en las filas, entonces la señal sería *discreta* (pues los valores que puede tomar son solamente enteros), *pero de tiempo continuo* y luciría como se muestra en la figura 1.5:

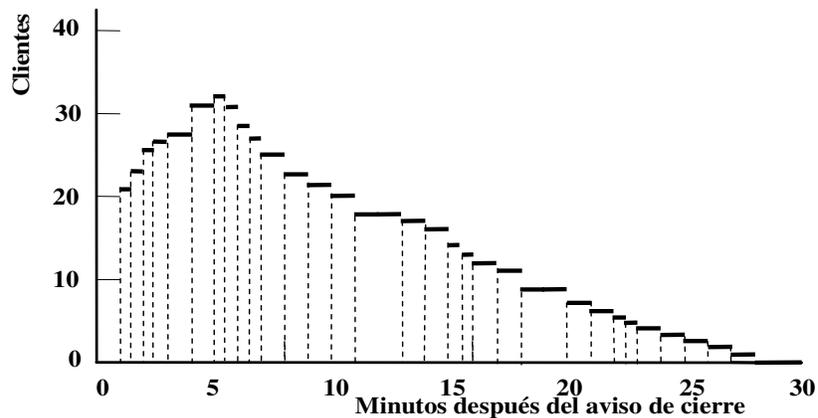


Figura 1.5. Señal discreta pero de tiempo continuo.

Para que una señal pueda ser procesada digitalmente debe ser una señal digital, si la señal es continua se debe convertir a una señal digital mediante un proceso que implica dos pasos:

- **Muestreo:** Conversión a señal de tiempo discreto
- **Cuantización:** Conversión de su conjunto de valores a un conjunto finito (múltiplos de un valor mínimo).

### 1.2.2 Señales determinísticas y señales aleatorias.

Cualquier señal que pueda ser modelada mediante una expresión matemática precisa, un conjunto específico de datos o una regla bien definida, de manera que los valores que toma la señal a lo largo del tiempo pueden ser conocidos sin ninguna *incertidumbre*, se denomina *señal determinística*.

En el mundo real sin embargo, siempre está presente algún tipo de incertidumbre, de manera que algunas componentes o la totalidad de las señales se comportan de manera impredecible o *aleatoria*. Son ejemplos típicos de señales aleatorias: los errores de los instrumentos de medición, el ruido de fondo de los amplificadores, las señales sísmicas, las señales de voz, etc.

Para modelar las señales aleatorias no se puede utilizar una simple expresión de su valor en función del tiempo, en lugar de esto se utilizan sus *propiedades estadísticas*. Esto es motivado por el hecho de que dos señales aleatorias pueden tener un comportamiento en el tiempo completamente distinto y sin embargo, poseer un *histograma* muy parecido, como se puede apreciar en la figura 1.5.

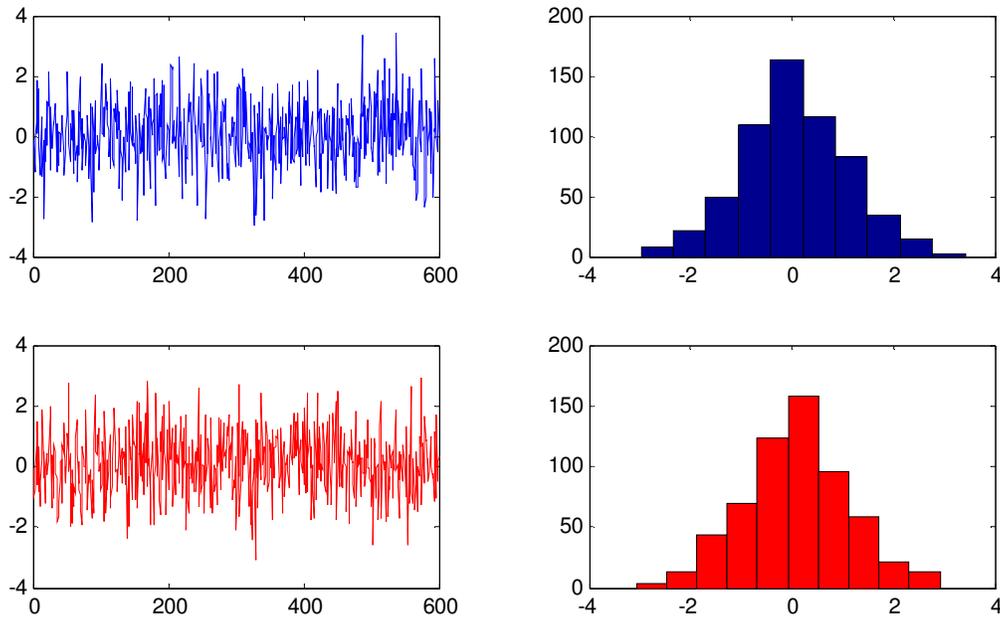


Figura 1.5 Dos señales aleatorias distintas y sus histogramas correspondientes

### 1.2.3 Señales periódicas y no-periódicas.

Una característica fundamental que distingue algunas señales es su propiedad de repetirse de manera exacta cada cierto tiempo.

☞ Una señal cuyos valores se repiten de manera exacta cada  $T$  unidades de tiempo se denomina *señal periódica*.

Así, una señal continua cuya función del tiempo es  $f(t)$ , será periódica de *periodo*  $T$  si existe una constante  $T > 0$  tal que

$$f(t) = f(t+T) \text{ para todo } t \quad (1.1)$$

El valor mínimo (positivo) de la constante  $T$  para el cual se cumple lo anterior se denomina *periodo fundamental* de la señal  $f(t)$ .

**Ejemplos:** ¿Cuál es el periodo fundamental de las siguientes señales?

1.-  $f(t) = \sin(\omega t)$  :

Dado que

$$\sin(t) = \sin(t + 2k\pi) \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Entonces

$$\sin(\omega t) = \sin(\omega t + 2k\pi) = \sin(\omega(t + \frac{2k\pi}{\omega})) = f(t + \frac{2k\pi}{\omega}) \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Por lo tanto, para  $k=1$  se tiene que  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  radianes.

2.-  $f(t) = \sin(\frac{t}{3}) + \cos(\frac{t}{4})$  :

De la definición:  $f(t) = f(t+T) = \sin(\frac{t+T}{3}) + \cos(\frac{t+T}{4})$

Por otro lado,

$$f(t) = \sin(\frac{t}{3} + 2k_1\pi) + \cos(\frac{t}{4} + 2k_2\pi) \text{ para algún } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

es decir, para que se cumpla lo anterior se requiere que

$$\frac{T}{3} = 2k_1\pi, \quad \frac{T}{4} = 2k_2\pi$$

de donde

$$T = 6k_1\pi = 8k_2\pi$$

por lo tanto los valores mínimos para los cuales se cumple lo anterior son  $k_1 = 4, k_2 = 3$ , es decir,  $T = 24\pi$  radianes. (Ver figura 1.6)

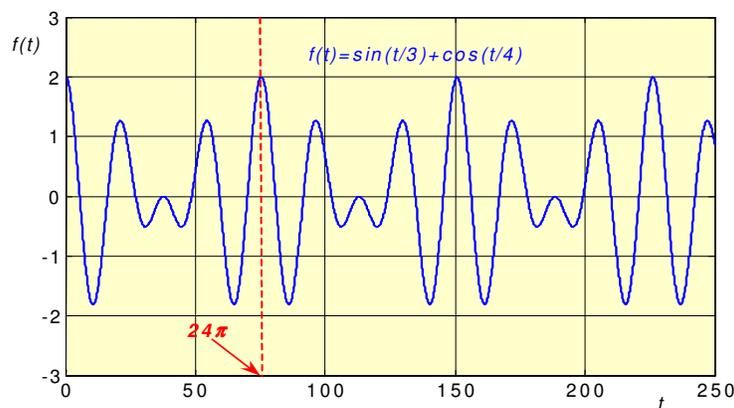


Figura 1.6 Grafica de la función  $f(t) = \sin(\frac{t}{3}) + \cos(\frac{t}{4})$

### 1.3. Concepto de frecuencia en señales continuas y discretas en el tiempo

La señal periódica representativa en el caso continuo es una *oscilación armónica*, la cual se describe por la ecuación

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta), \quad \text{para } -\infty < t < \infty \tag{1.2}$$

Donde  $A$  es la *amplitud* de la senoide,  $\Omega$  es la *frecuencia* en radianes por segundo (rad/s) y  $\theta$  es la *fase* en radianes.

En lugar de  $\Omega$ , se puede usar la frecuencia  $F$  en ciclos por segundo (Hertz), usando la relación

$$\Omega = 2\pi F \tag{1.3}$$

Entonces la ecuación (1.2) se puede describir como  $x_a(t) = A \cos(2\pi Ft + \theta)$ , para  $-\infty < t < \infty$ .

El periodo fundamental de la senoide  $x_a(t)$  es  $T = \frac{1}{F} = \frac{2\pi}{\Omega}$

☞ **Observación:** Para  $F=0$  corresponde  $T = \infty$ , lo cual es consistente con la idea intuitiva de periodo fundamental.

Otra clase importante de funciones periódicas son las señales exponenciales complejas como la siguiente, también llamadas *fasores*

$$x_a(t) = Ae^{j(\Omega t + \theta)} \quad (1.4)$$

Es fácil ver que son señales periódicas, pues de la fórmula de Euler se tiene que

$$e^{\pm j\phi} = \cos \phi \pm j \sin \phi \quad (1.5)$$

Entonces, el periodo de la exponencial (1.4) es  $\frac{2k\pi}{\Omega}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (su periodo fundamental es  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ ).

El *fasor* (1.4) se puede representar como un vector de magnitud A y de ángulo variante en el tiempo  $\Omega t + \theta$ , es decir, un fasor es un vector en el plano complejo que gira a una frecuencia angular  $\Omega$  respecto al origen.

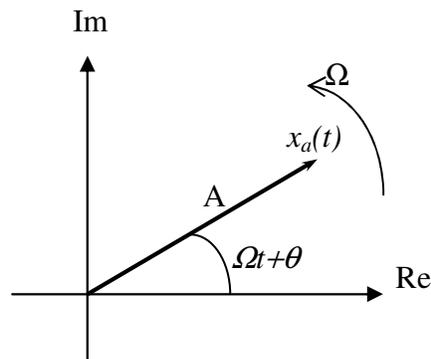


Figura 1.7 Representación gráfica del fasor  $x_a(t) = Ae^{j(\Omega t + \theta)}$

### 1.3.1 Frecuencias negativas y fasores

Por definición la frecuencia es una cantidad física inherentemente positiva, sin embargo, por conveniencia matemática necesitaremos introducir frecuencias negativas; para entender esto consideremos la señal sinusoidal (1.2) y expresémosla mediante la fórmula de Euler como sigue

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\Omega t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\Omega t + \theta)}$$

Por lo tanto, la señal sinusoidal (1.2) se puede interpretar como la suma de dos fasores conjugados uno girando a una frecuencia  $\Omega$  y otro a una frecuencia  $-\Omega$  como se muestra en la figura 1.8

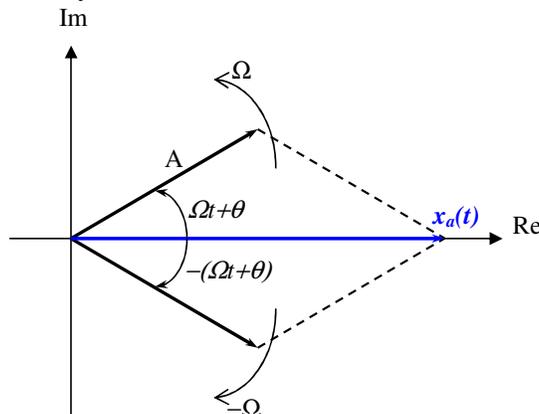


Figura 1.8 Interpretación de  $x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta)$  como suma de dos fasores

En términos de fasores, una frecuencia negativa corresponde simplemente a un fasor que gira en el sentido de las manecillas del reloj.

### 1.3.2 Señales sinusoidales en tiempo discreto.

Una señal sinusoidal en tiempo discreto puede expresarse como

$$x(n) = A \cos(\omega n + \theta), \quad \text{para } -\infty < n < \infty \quad (1.6)$$

o bien,

$$x(n) = A \cos(2\pi f n + \theta), \quad \text{para } -\infty < n < \infty$$

donde  $n$  es un número entero denominado *número de muestra*,  $A$  es la amplitud de la senoide,  $\omega = 2\pi f$  es la *frecuencia angular en radianes por muestra*,  $f$  es la frecuencia en ciclos por muestra y  $\theta$  es la fase en radianes.

☞ Una señal de tiempo discreto  $x(n)$  es periódica de periodo  $N > 0$  ( $N$  entero) si

$$x(n) = x(n + N) \quad \text{para todo } n \quad (1.7)$$

al valor más pequeño de  $N$  para el cual se cumple lo anterior se le llama *periodo fundamental* de  $x(n)$

### 1.3.3. Propiedades de las señales sinusoidales en tiempo discreto.

📌 **Propiedad 1:** A diferencia de las sinusoides en tiempo analógico, las sinusoides en tiempo discreto no necesariamente son periódicas.

Para que una senoide de frecuencia  $f_0$  sea periódica se debe cumplir

$$\cos(2\pi f_0(n + N) + \theta) = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

lo cual solo se puede cumplir si existe algún entero  $k$  tal que

$$2\pi f_0 N = 2k\pi$$

de donde

$$f_0 = \frac{k}{N}$$

es decir,  $f_0$  debe ser un cociente de enteros (es decir, un número racional).

☞ **Observación:** El periodo fundamental de una senoide de tiempo discreto es muy sensible a pequeñas variaciones del valor de frecuencia  $f$ , como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo:** ¿Cual es el periodo fundamental de una senoide con  $f=31/60$ ? ¿Y si  $f=30/60$ ?

Para el primer caso se debe cumplir  $\frac{31}{60} = \frac{k}{N}$  con los menores valores de  $k$ , y de  $N$ , esto significa que  $k=31$ ,  $N=60$ .

En el segundo caso se debe cumplir  $\frac{30}{60} = \frac{k}{N}$  con los menores valores de  $k$  y de  $N$ , esto se cumple para  $k=1$ ,  $N=2$

Es decir, hemos obtenido un periodo fundamental de cada 60 muestras en el primer caso y de cada 2 muestras en el segundo caso (ver figura 1.9).

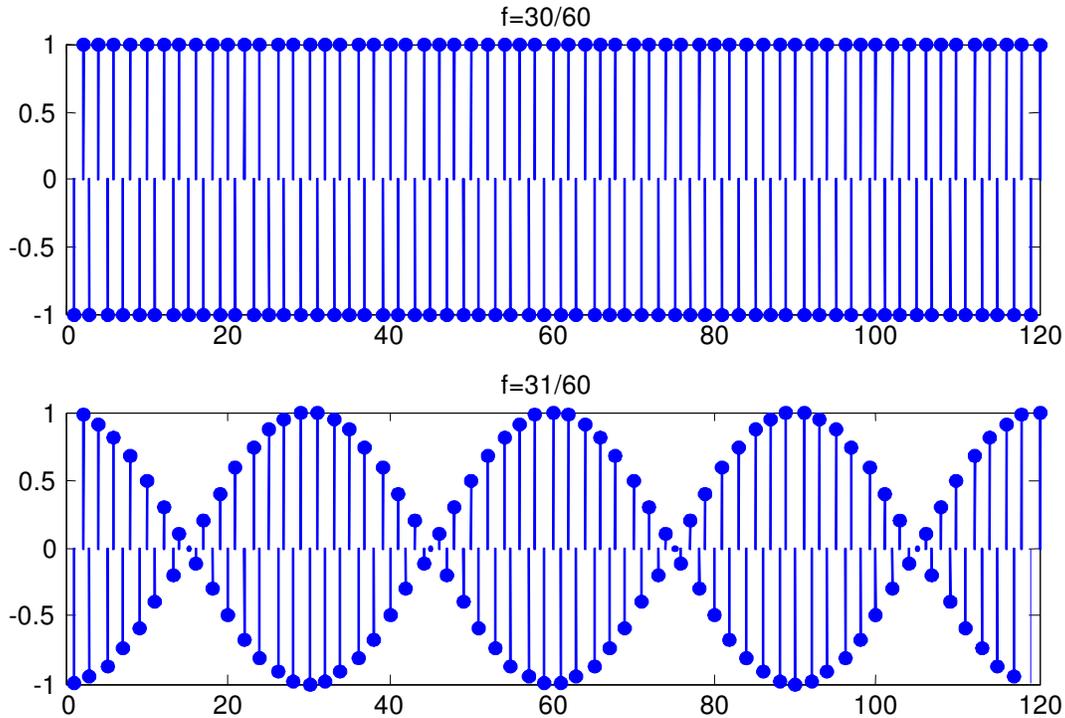


Figura 1.9 Sinusoides en tiempo discreto  $x(n) = \cos(2\pi fn)$  con diferentes valores de  $f$

**Propiedad 2.** Las sinusoides de tiempo discreto cuyas frecuencias angulares están separadas por un múltiplo entero de  $2\pi$  son idénticas.

En efecto, consideremos la senoide  $x(n) = \cos(\omega_0 n + \theta)$ , comparémosla con la senoide  $y(n) = \cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \theta)$ , donde  $k$  es un entero, entonces

$$y(n) = \cos((\omega_0 + 2k\pi)n + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta + 2kn\pi) = x(n)$$

Pues el producto  $kn$  también es un entero. Esto tiene dos consecuencias importantes:

1) Todas las secuencias sinusoidales  $x_k(n) = A \cos((\omega + 2k\pi)n + \theta)$  con  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , son indistinguibles (idénticas) para  $-\pi \leq \omega \leq \pi$

2) Para cualquier secuencia sinusoidal cuya frecuencia está en el rango  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ , es decir,  $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$  existirá una infinidad de secuencias idénticas a ella en el rango  $|\omega| > \pi$ , es decir,  $|f| > \frac{1}{2}$  las cuales se obtienen simplemente sumando a  $\omega$  un múltiplo de  $\pi$ . A éstas últimas se les llama los *alias* de la primera.

Las secuencias sinusoidales con frecuencias en el rango  $|\omega| < \pi$  son distintas entre sí, por lo tanto se consideran únicas y las sinusoides idénticas a ellas con frecuencias  $|\omega| > \pi$  se consideran “copias” (alias) de éstas.

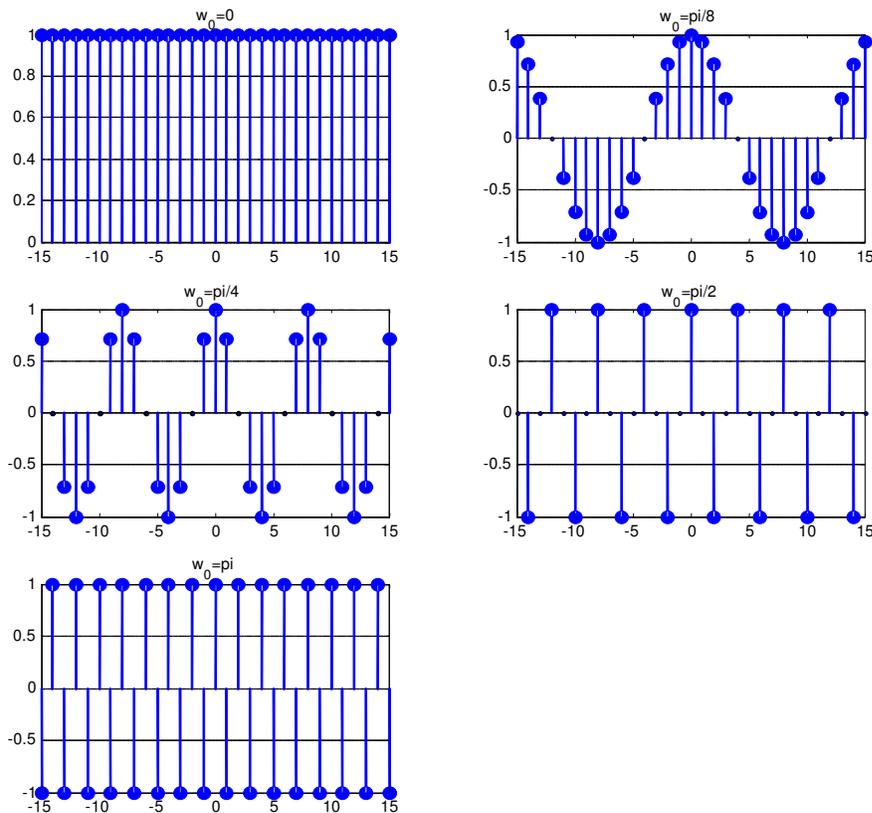
De hecho, las sinusoides discretas con frecuencias en cualquier intervalo de longitud  $2\pi$  son *todas* las sinusoides posibles, por lo tanto el rango de frecuencias para sinusoides de tiempo discreto es finito y de longitud  $2\pi$ , por ello se acostumbra usar un *rango fundamental* de frecuencias el cual por conveniencia se elige como  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  ( $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$ ) o a veces  $0 \leq \omega \leq 2\pi$  ( $0 \leq f \leq 1$ ). Este razonamiento da lugar a la tercera propiedad:

**Propiedad 3.** La tasa más alta de oscilación en una senoide en tiempo discreto se alcanza para  $|\omega| = \pi$  o equivalentemente  $|f| = \frac{1}{2}$

Para ilustrar aún más esta propiedad consideremos la siguiente tabla que muestra la variación del periodo fundamental ( $N$ ) de la senoide  $x(n) = \cos(\omega_0 n)$  a medida que incrementamos el valor de  $\omega_0$ :

$\omega_0$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$f$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$N$	$\infty$	16	8	4	2

En la figura 1.10 se ilustra la secuencia sinusoidal para cada caso ilustrado en la tabla anterior.



**Figura 1.10.** Sinusoide  $x(n) = \cos(\omega_0 n)$  para diferentes valores de  $\omega_0$

### 1.3.4. Frecuencias negativas y fasores en tiempo discreto

Las sinusoides de tiempo discreto se pueden expresar en términos de funciones exponenciales complejas de la misma manera como se describió para el caso de tiempo continuo; así, la sinusoides  $x(n) = A \cos(\omega n + \theta)$  se puede expresar mediante la fórmula de Euler como sigue

$$x(n) = \frac{A}{2} e^{j(\omega n + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega n + \theta)} \quad (1.8)$$

por lo tanto, también se puede representar como la suma de dos fasores, uno girando en sentido de las manecillas del reloj a una frecuencia  $-\omega$  y el otro girando en sentido contrario a las manecillas del reloj a una frecuencia  $\omega$ , con la diferencia que estos fasores giran a saltos bruscos marcados por los valores enteros de  $n$  y no de manera suave como en el caso continuo.

### 1.4. Conversión analógico-digital y digital-analógico

La gran mayoría de las señales de interés práctico como señales de voz, señales biológicas, sísmicas, de radar y de diversos tipos de comunicación como audio, video, etc. son analógicas. En esta sección se describirá el proceso de conversión de señales analógicas a digitales. En la figura 1.11 se muestra a bloques los tres pasos que se desarrollan en un convertidor de analógico a digital (A/D), los cuales son:

1. **Muestreo.** Conversión de la señal de tiempo continuo  $x_a(t)$  a una señal de tiempo discreto  $x(n)$ , de manera que  $x(n) = x_a(nT)$ , donde  $T$  se denomina el *intervalo de muestreo*.
2. **Cuantificación.** Es la conversión de la señal de tiempo discreto  $x(n)$  en una señal de tiempo discreto con valores discretos  $x_q(n)$  (señal digital). La diferencia entre estas dos señales se denomina *error de cuantificación*.
3. **Codificación.** Es la representación de cada valor de la señal digital  $x_q(n)$  mediante un código binario de  $b$  bits.

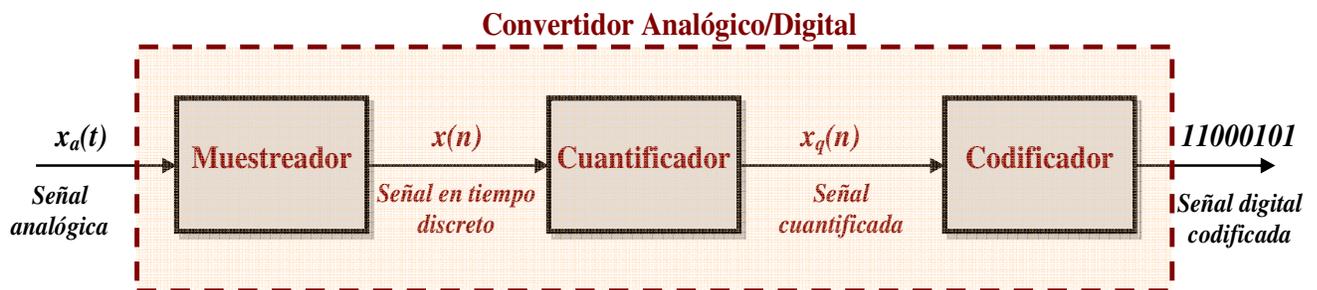


Figura 1.11 Conversión de Analógico a Digital

En algunas aplicaciones, por ejemplo, en el procesamiento digital de audio y en el control de procesos, además de la conversión A/D, se requiere generar nuevamente la señal analógica después de haberla procesado en su forma digital. Al proceso de conversión de una señal digital a una analógica se le denomina conversión D/A o *reconstrucción de señales* y su función básica es “conectar” los puntos que representan cada valor de la señal digital efectuando algún tipo de *interpolación*.

En la figura 1.12 se muestra la conversión D/A (reconstrucción) utilizando el interpolador más simple de construir y el más utilizado cuando el proceso se tiene que hacer en *tiempo real*. Este reconstructor se denomina *retenedor de orden cero* o aproximador por escalones y su funcionamiento se limita a retener cada valor discreto hasta que se tiene uno nuevo.

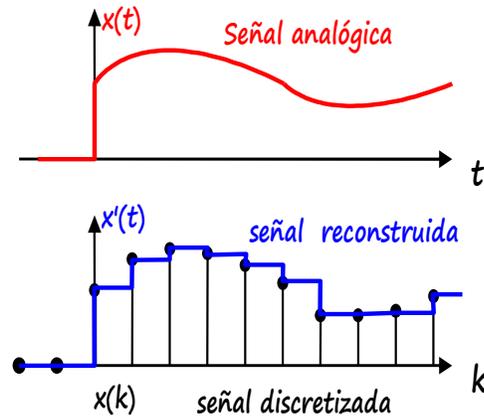


Figura 1.12 Conversión D/A mediante un retenedor de orden cero.

### 1.4.1 Muestreo de señales analógicas

El proceso a través del cual una señal continua  $x_a(t)$  es transformada en una señal discreta "equivalente"  $x(n)$  consiste simplemente en la toma de muestras de la señal continua en instantes discretos de tiempo  $n$  denominados *instantes de muestreo*  $n = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

El tipo de muestreo que se considera en este curso se denomina *muestreo periódico o uniforme*. El proceso de muestreo uniforme se muestra en la figura 1.13. Para realizar dicho proceso es necesaria una señal de "reloj" que marque el ritmo de la toma de muestras, la frecuencia  $F_s$  de dicha señal se denomina *frecuencia de muestreo* (en hertz) y su periodo  $T=1/F_s$  se denomina *periodo de muestreo* y se considera constante.

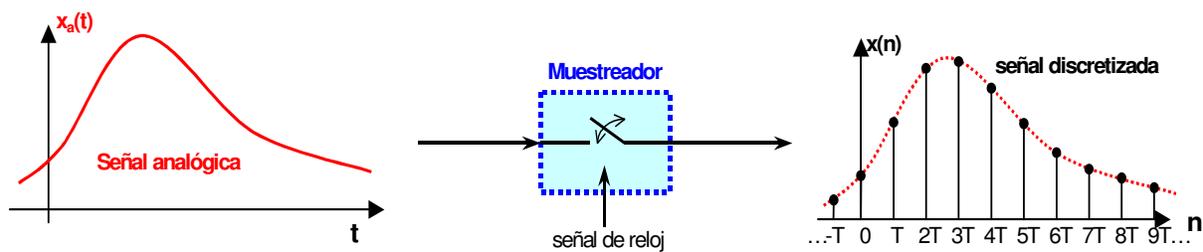


Figura 1.13 Proceso de muestreo

Un sistema muestreador consiste simplemente en un switch que se cierra en el momento marcado por la señal de reloj y en todos los demás instantes permanece abierto (switch analógico). En una computadora digital este proceso tiene lugar en un módulo de adquisición de datos o *convertidor analógico-digital*.

Dado que este proceso de conversión consume un tiempo significativo, cada muestra de la señal continua deberá ser "congelada" mientras dura su conversión, este congelamiento se denomina retención. En la figura 1.14 se muestra un sistema típico *muestreador/retenedor*.

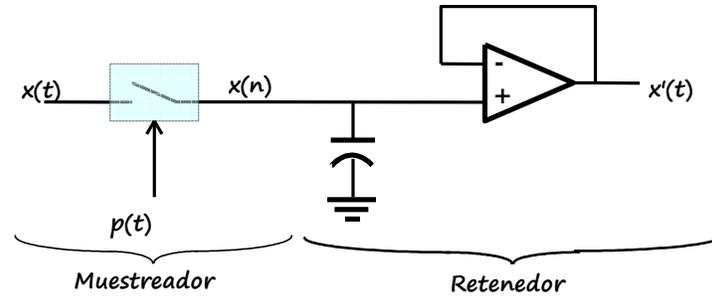


Figura 1.14 Un muestreador/retenedor típico

### 1.4.2 Relación entre frecuencia de tiempo continuo y de tiempo discreto

El muestreo periódico establece una relación entre las variables de tiempo continuo ( $t$ ,  $F$  y  $\Omega$ ) de la señal original y las variables de tiempo discreto correspondientes ( $n$ ,  $f$  y  $\omega$ ) de la señal discretizada. Esta relación está dada por el periodo de muestreo  $T$  o equivalentemente por la frecuencia de muestreo  $F_s$ , ya que

$$t = nT = \frac{n}{F_s}$$

Para averiguar la relación entre las variables de frecuencia consideremos el muestreo periódico de una senoide analógica de la forma

$$x_a(t) = A \cos(2\pi Ft + \theta)$$

que al muestrearse periódicamente con una frecuencia  $F_s = 1/T$  da lugar a la senoide discreta

$$x(n) = x_a(nT) = A \cos(2\pi F nT + \theta) = A \cos(2\pi F \frac{n}{F_s} + \theta)$$

que si la comparamos con la forma general de una senoide discreta  $x_n = A \cos(2\pi f n + \theta)$  obtenemos

$$f = \frac{F}{F_s}$$

o equivalentemente

$$\omega = \Omega T$$

Por esta razón a la frecuencia  $f$  se le suele llamar frecuencia normalizada. Podemos conocer el valor de la frecuencia original  $F$  a partir de  $f$  solamente si conocemos a que velocidad  $F_s$  se realizó el muestreo.

Recordando que el rango de valores para  $f$  es  $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$ , o equivalentemente  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ , el rango posible de frecuencias  $F$  de una senoide analógica cuando se muestrea a una velocidad  $F_s = 1/T$  será

$$-\frac{F_s}{2} \leq F \leq \frac{F_s}{2}, \text{ o bien, } -\pi F_s \leq \Omega \leq \pi F_s$$

es decir,

$$-\frac{1}{2T} \leq F \leq \frac{1}{2T}, \text{ o bien, } -\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T}$$

En la siguiente tabla se muestra un resumen de las relaciones de frecuencia en tiempo continuo, en tiempo discreto y su conversión de un caso a otro:

tiempo continuo		tiempo discreto
$\Omega = 2\pi F$ $\Omega$ en $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ , $F$ en Hertz		$\omega = 2\pi f$ $\omega$ en $\frac{\text{rad}}{\text{muestra}}$ , $f$ en $\frac{\text{ciclos}}{\text{muestra}}$
$-\infty \leq \Omega \leq \infty$  $-\infty \leq F \leq \infty$		$-\pi \leq \omega \leq \pi$  $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$

### 1.4.3 Aliasing o Confusión de Frecuencia.

Dado que la máxima frecuencia de una señal en tiempo discreto es  $\omega=\pi$  o  $f=1/2$ , los valores máximos de una señal de tiempo continuo que pueden ser muestreados sin ambigüedad son

$$\Omega_{\max} = \frac{\pi}{T} = \pi F_s$$

$$F_{\max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T}$$

¿Qué pasa con las frecuencias superiores a  $F_s/2$ ? Veámoslo con un ejemplo:

**Ejemplo:** Las siguientes señales analógicas son muestreadas a una frecuencia  $F_s=40$  Hz.

$$x_1(t) = \cos(2\pi(10)t)$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi(50)t)$$

Las secuencias discretas obtenidas serán

$$x_1(n) = \cos(2\pi(\frac{10}{40})n) = \cos(\frac{1}{2}\pi n)$$

$$x_2(n) = \cos(2\pi(\frac{50}{40})n) = \cos(\frac{5}{2}\pi n) = \cos(\frac{1}{2}\pi n + 2\pi n) = \cos(\frac{1}{2}\pi n)$$

Es decir, las secuencias  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  son idénticas, es decir, la frecuencia  $F_2=50$ Hz es un *alias* de la frecuencia  $F_1=10$  Hz cuando ambas son muestreadas a  $F_s=40$ Hz.

De hecho, todas las sinusoides de la forma  $\cos(2\pi(F_1 + 40k)t)$  con  $k=1,2,3,\dots$  producen señales discretas idénticas cuando son muestreadas a 40 Hz. Es decir, todas estas son *alias* de  $F_1=10\text{Hz}$ .

☞ Es decir, en general, las frecuencias  $F_0 + kF_s$  con  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  son indistinguibles (y por lo tanto *alias*) de la frecuencia  $F_0$  después del muestreo, por lo tanto a partir de las muestras de una señal de tiempo continuo **no** es posible determinar cual es la frecuencia de la señal original.

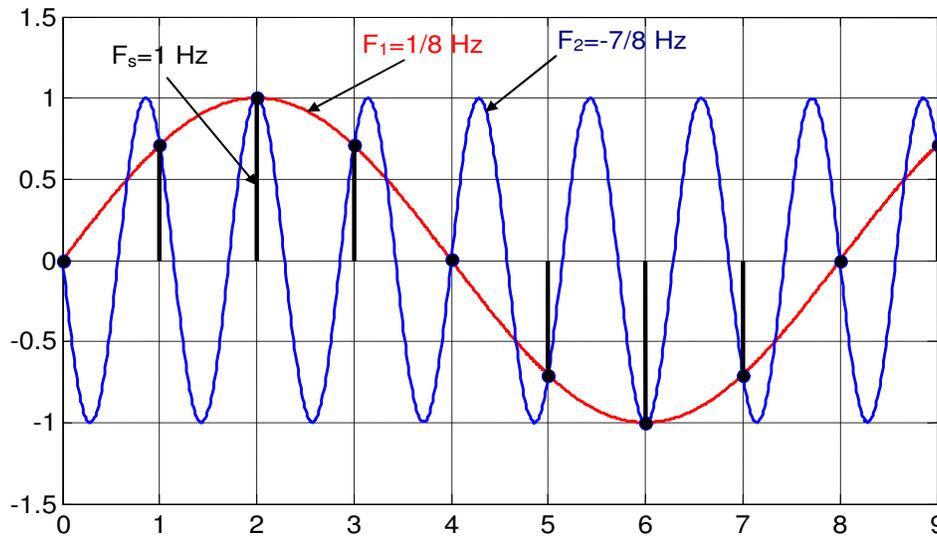


Figura 1.15. Un caso de aliasing

En la figura 1.15 se muestra un caso de *aliasing*: Una sinusoidal de frecuencia  $F_1=1/8$  Hz y otra de  $F_2=-7/8$  Hz se muestrean a  $F_s=1$  Hz produciendo muestras idénticas.

### 1.5. El teorema fundamental del muestreo

Es evidente que al discretizar una señal de tiempo continuo se pierde algo de información en el proceso, es decir la "información" contenida en  $x(n)$  no es la misma que la de la señal original  $x_a(t)$ , sin embargo, también es fácil ver que  $x(n)$  aún contiene algo de la información de  $x_a(t)$ . De aquí surge en forma natural la pregunta:

*¿Es posible recuperar toda la información de la señal original  $x_a(t)$  a partir de su versión discretizada  $x(n)$ ?*

El Teorema del muestreo de Claude Shannon da una respuesta a una pregunta aún más específica: *¿Cuándo y cómo es posible recuperar dicha información y cuándo no?*

☞ La idea subyacente en el teorema de Shannon es que toda señal analógica  $x_a(t)$  tiene un *contenido de frecuencias*, es decir, se puede expresar como una suma de sinusoides de diferentes amplitudes y frecuencias:

$$x_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi F_k t + \theta_k) \quad (1.9)$$

Por lo tanto,  $x_a(t)$  contiene alguna frecuencia máxima  $F_{max}$  que determinará la mínima frecuencia de muestreo necesaria para poder recuperar la información original.

📖 **Teorema del muestreo.** Una señal de tiempo continuo  $x_a(t)$  cuya máxima frecuencia contenida es  $F_{max}$  se muestrea a una velocidad  $F_s$  se puede recuperar completamente a partir de la señal muestreada  $x(n)$  solo si

$$F_s > 2F_{max} \quad (1.10)$$

Si se cumple la condición (1.10) la señal  $x_a(t)$  se recuperará mediante la fórmula de interpolación de Shannon siguiente

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) g(t-nT) \quad (1.11)$$

donde

$$g(t) = \frac{\sin(\pi F_s t)}{\pi F_s t} \quad (1.12)$$

y donde  $x(n) = x_a(nT) = x_a(n/F_s)$ .

Debido al importante papel que juega la tasa de muestreo  $F_N=2F_{max}$  a ésta se le llama la *tasa de muestreo de Nyquist*.

### Observaciones:

- ☞ El Teorema de Shannon es un resultado teórico, en el cual se considera un muestreador idealizado y no se consideran errores en los componentes electrónicos utilizados para implementar de manera práctica el muestreo o la reconstrucción de la señal. En un sistema real, la restricción teórica que establece el Teorema ( $F_s > 2F_{max}$ ), deberá ser exagerada al menos unas cinco veces
- ☞ La fórmula de interpolación es **no causal** de manera que no puede ser implementada en tiempo real.
- ☞ La hipótesis sobre el contenido de frecuencias de  $x_a(t)$  tampoco es directamente aplicable a cualquier señal y aunque la mayoría de las señales de interés tienen un contenido de frecuencias limitado, en el caso en que no lo tengan, el teorema no se puede aplicar. Por otro lado, siempre es posible usar filtros analógicos pasabajas para evitar problemas con el contenido de frecuencias más altas que  $2F_s$ .

**Ejemplo:** Para la siguiente señal analógica

$$x_a(t) = 3 \cos(2000\pi t) + 5 \sin(6000\pi t) + 10 \cos(12000\pi t)$$

- a) ¿Cuál es la tasa de Nyquist para esta señal?
- b) Si se muestrea esta señal a una tasa  $F_s=5000$  muestras/seg, ¿Cuál es la señal obtenida tras el muestreo?

- c) ¿Cuál es la señal analógica  $x'_a(t)$  que se obtendría a partir de estas muestras mediante el interpolador ideal de Shannon?

**Solución.**

a) Las frecuencias contenidas en la señal analógica son

$$F_1=1\text{kHz}, F_2=3\text{kHz} \text{ y } F_3=6\text{ kHz}.$$

De donde  $F_{max}=6\text{kHz}$ , entonces la tasa de Nyquist es  $F_N = 2F_{max} = 12\text{ kHz}$

b) Como se está muestreando a una tasa menor que la de Nyquist:  $F_s=5\text{kHz}$ , en la señal muestreada no se tendrán todas las frecuencias de la señal original, la máxima frecuencia que la señal discreta puede representar sin ambigüedad es  $F_s/2=2.5\text{ kHz}$ .

En efecto, la señal muestreada es  $x(n) = x_a(nT) = x_a(n/F_s) = x_a(n/5000)$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} x(n) &= 3\cos(2\pi(\frac{1}{5})n) + 5\sin(2\pi(\frac{3}{5})n) + 10\cos(2\pi(\frac{6}{5})n) \\ &= 3\cos(2\pi(\frac{1}{5})n) + 5\sin(2\pi(1-\frac{2}{5})n) + 10\cos(2\pi(1+\frac{1}{5})n) \\ &= 3\cos(2\pi(\frac{1}{5})n) + 5\sin(2\pi(-\frac{2}{5})n) + 10\cos(2\pi(\frac{1}{5})n) \end{aligned}$$

Obteniéndose finalmente  $x(n) = 13\cos(2\pi(\frac{1}{5})n) - 5\sin(2\pi(\frac{2}{5})n)$

Otra manera de obtener el resultado anterior es como sigue:

La única frecuencia que se puede obtener sin ambigüedad es  $F_1$ , pues  $F_1 = 1\text{kHz} < F_s/2$ , las otras dos frecuencias producirán alias cuya frecuencia está dada por  $F' = F_k - kF_s$ , con  $-\frac{F_s}{2} < F' < \frac{F_s}{2}$ , es decir,

$$F'_1 = F_1 = 1\text{kHz}$$

$$F'_2 = F_2 - F_s = 3\text{kHz} - 5\text{kHz} = -2\text{kHz}$$

$$F'_3 = F_3 - F_s = 6\text{kHz} - 5\text{kHz} = 1\text{kHz}$$

por lo tanto  $f_1 = F_1/F_s = \frac{1}{5}$ ,  $f_2 = F'_2/F_s = -\frac{2}{5}$ ,  $f_3 = F'_3/F_s = \frac{1}{5}$  que coincide con el resultado anterior.

c) Como solamente la información de las frecuencias 1kHz y 2kHz está presente en la señal muestreada, solo se recuperará:

$$x'_a(t) = 13\cos(200\pi t) - 5\sin(4000\pi t)$$

que evidentemente **no** es la señal original. Esta distorsión es provocada por el aliasing originado por la baja velocidad de muestreo.

# Capítulo 2

## Señales y Sistemas en Tiempo Discreto

### 2.1.- Señales en tiempo discreto

Como ya se dijo en el capítulo anterior, las señales de tiempo discreto no son más que secuencias de valores que toma una variable en los instantes de muestreo. A continuación establecemos diferentes maneras de denotar una señal de tiempo discreto:

#### 2.1.1.- Representación de señales de tiempo discreto.

Una señal de tiempo discreto se puede representar de diferentes maneras, cada una de ellas conveniente dependiendo del objetivo de la representación.

**Representación funcional.** Se puede usar una expresión algebraica por cada caso de valores de  $n$ , como en el siguiente ejemplo de una señal exponencial

$$x(n) = \begin{cases} (0.5)^n & \text{para } n \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.1)$$

**Representación gráfica.** Es la representación en un plano del comportamiento de los valores de  $x(n)$  respecto a  $n$ . En la figura 2.1 se muestra la representación grafica para el ejemplo anterior

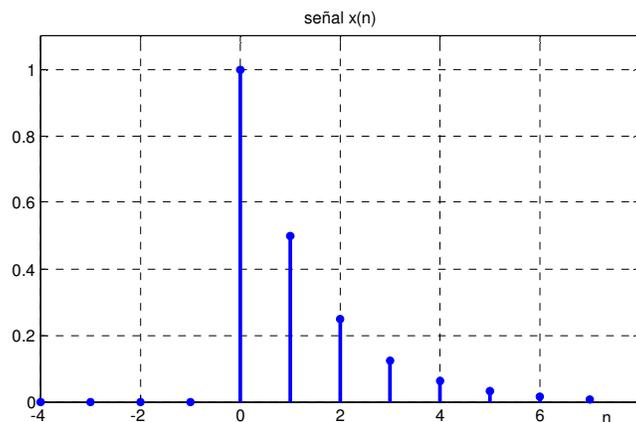


Figura 2.1. Señal exponencial dada por la ecuación (2.1)

**Representación como secuencia.** Es la simple enumeración como conjunto infinito de valores de  $x(n)$  ordenado de de acuerdo a los valores de  $n$ . El origen ( $n=0$ ) se indica marcando con una flecha ( $\uparrow$ ) como en el ejemplo de la ecuación (2.1):

$$x(n) = \{ \dots, 0, 0, 0, 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125, \dots \}$$

$\uparrow$

### 2.1.2.- Algunas señales de tiempo discreto típicas.

Algunas señales son de especial interés por su uso para el análisis de aspectos específicos de sistemas discretos:

**Impulso unitario.** Se denota como  $\delta(n)$  y se define como sigue

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

A diferencia del impulso unitario analógico (el cual vale cero en todos lados, excepto en  $t=0$ , en donde está indefinido pero su área en ese punto vale 1) el impulso unitario discreto está definido para todo valor de  $n$ .

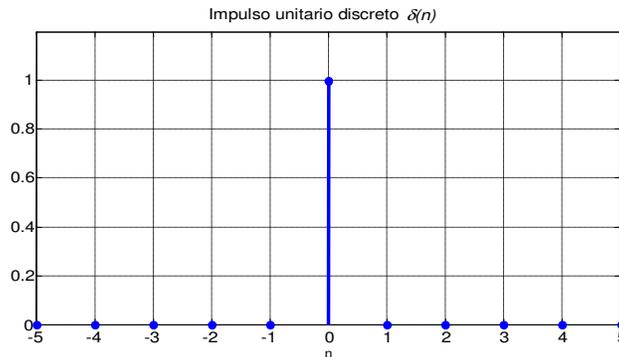


Figura 2.2. Impulso discreto

**Escalón unitario.** Lo denotaremos por  $u(n)$  y está definido como sigue

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n \geq 0 \\ 0 & \text{para } n < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

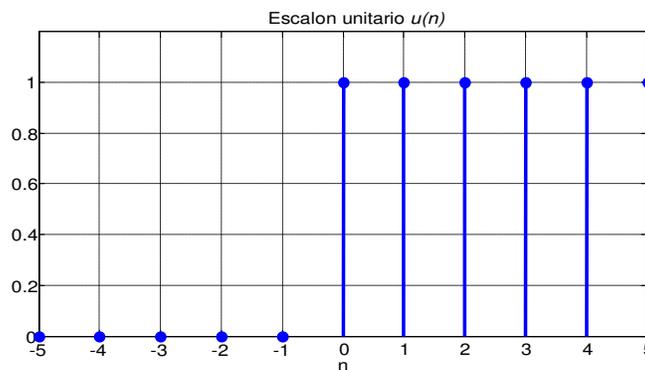


Figura 2.3. Escalón unitario discreto

**Rampa unitaria.** Denotada  $u_r(n)$ , se define como

$$u_r(n) = \begin{cases} n & \text{para } n \geq 0 \\ 0 & \text{para } n < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

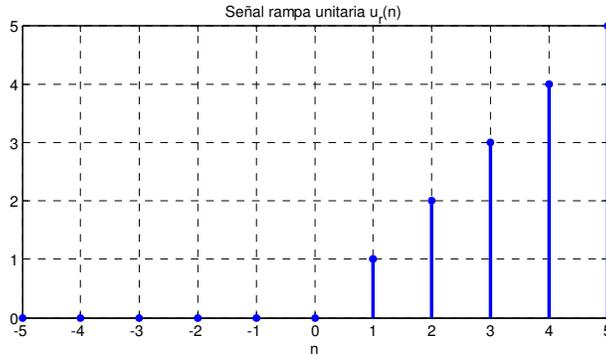


Figura 2.4. Señal rampa unitaria discreta.

**Señal Exponencial.** Son secuencias de la forma

$$x(n) = a^n \text{ para todo } n \quad (2.5)$$

Donde la constante  $a$  puede ser real o compleja. El comportamiento de estas señales depende en gran medida del valor de  $a$ . En la figura 2.5 se muestran algunas señales exponenciales para el caso en que  $a$  es un número real.

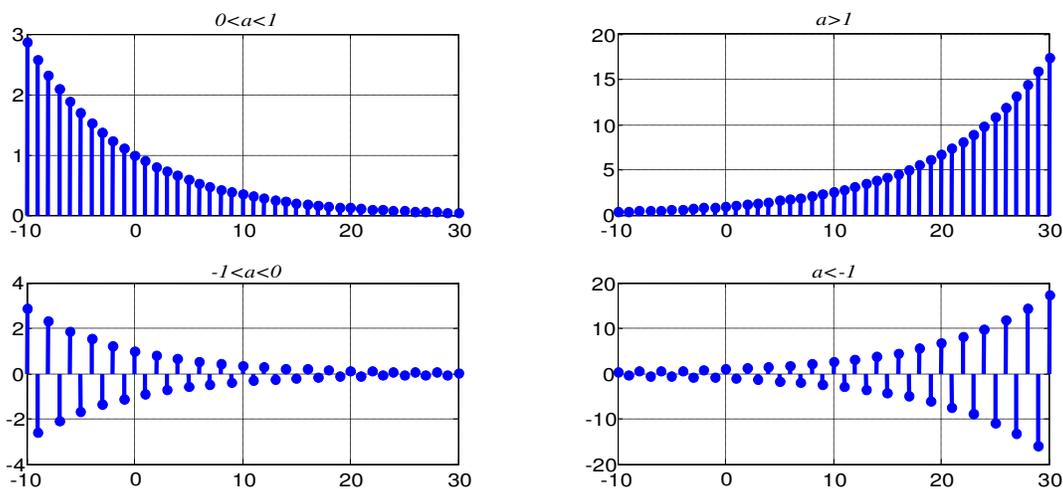


Figura 2.5. Señal exponencial discreta para los cuatro casos cuando  $a$  es real.

En el caso en que  $a$  sea una constante compleja, digamos  $a = re^{j\theta}$ , entonces  $x(n)$  será una señal discreta que toma valores complejos y se puede expresar como:

$$x(n) = r^n e^{jn\theta} = r^n (\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)) \quad (2.6)$$

Si se quiere una representación gráfica de  $x(n)$  en este caso se pueden representar su parte real  $\text{Re}[x(n)] = r^n \cos(n\theta)$  y su parte imaginaria por separado  $\text{Im}[x(n)] = r^n \sin(n\theta)$ .

### 2.1.3.- Operaciones simples con señales de tiempo discreto.

Además de la combinación de señales mediante operaciones aritméticas, las cuales operan sobre la *amplitud* (variable dependiente) de las señales tales como:

- ✚ Suma de señales:  $y(n)=x_1(n)+x_2(n)$
- ✚ Escalamiento, amplificación o multiplicación por una constante:  $y(n)=A x(n)$
- ✚ Multiplicación de señales  $y(n)=x_1(n) x_2(n)$

También hay transformaciones que operan sobre la variable independiente, es decir, el tiempo. Este segundo tipo de operaciones se definen para una constante positivo  $k$  y son:

- ✚ Desplazamiento en el tiempo:
  - Retraso:  $y(n)=x(n-k)$
  - Adelanto:  $y(n)=x(n+k)$
- ✚ Reflexión:  $y(n)=x(-n)$ .
- ✚ Submuestreo:  $y(n)=x(kn)$

En la figura 2.6 se muestra la señal discreta

$$x(n) = \{\dots, 0, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 0, 0, \dots\} \quad (2.7)$$

↑

En la misma figura 2.6 se muestra la señal  $x(n)$  retrasada en 3 muestras:  $y_1(n)=x(n-3)$ , adelantada en 3 muestras:  $y_2(n)=x(n+3)$  y submuestreada tomando una muestra de cada dos muestras originales, es decir,  $y_3(n)=x(2n)$ .

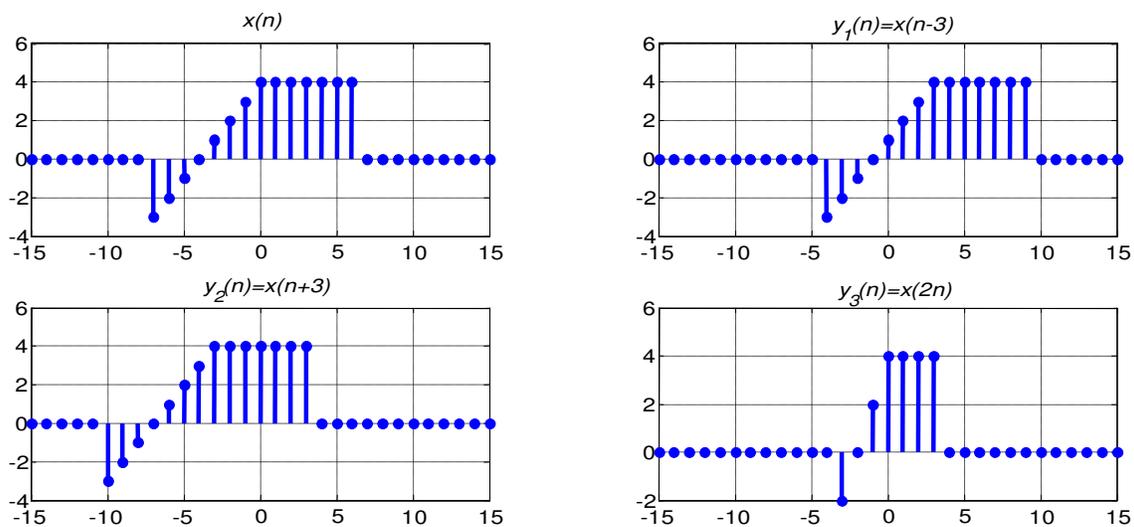


Figura 2.6. Atraso, adelanto y submuestreo de una señal discreta.

## 2.2.- Sistemas en tiempo discreto.

Un *sistema discreto* es una operación o un conjunto de operaciones que se realizan sobre la señal de entrada  $x(n)$  para producir una señal de salida  $y(n)$ . La señal de salida está relacionada con la entrada mediante una relación de transformación

$$y(n) = T[x(n)] \quad (2.8)$$

Donde  $T$  denota la operación, transformación o procesado que el sistema realiza sobre  $x(n)$  para producir  $y(n)$ .

### 2.2.1.- Descripción entrada-salida.

La descripción entrada-salida define la transformación  $T$  en términos de la regla lógico-matemática que permite obtener los valores de  $y(n)$  a partir de los valores de  $x(n)$ . Esto permite visualizar el sistema discreto como una caja negra que realiza la operación  $T$  sobre la entrada  $x(n)$  para producir la salida  $T[x(n)]$  como se muestra en la figura 2.7.

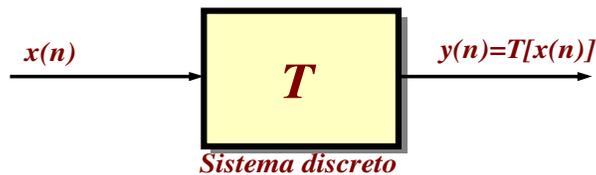


Figura 2.7. Representación entrada-salida de un sistema discreto.

**Ejemplo.** Dada la siguiente señal de entrada

$$x(n) = \begin{cases} |n| & \text{para } -3 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Obtener la salida de los sistemas discretos cuya relación entrada-salida se especifica a continuación:

- $y(n)=x(-n)$
- Sistema retardo unitario:  $y(n)=x(n-1)$
- Sistema adelanto unitario:  $y(n)=x(n+1)$
- Sistema promedio móvil:  $y(n)=\text{promedio de } \{x(n-1), x(n), x(n+1)\}$
- $y(n)=\max\{x(n-1), x(n), x(n+1)\}$
- Sistema acumulador:  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$

**Solución.** Primero determinamos las muestras de la señal de entrada:

$$x(n) = \{\dots, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 0, 0, \dots\}$$

↑

En la figura 2.8 se muestra la representación gráfica de  $x(n)$ .

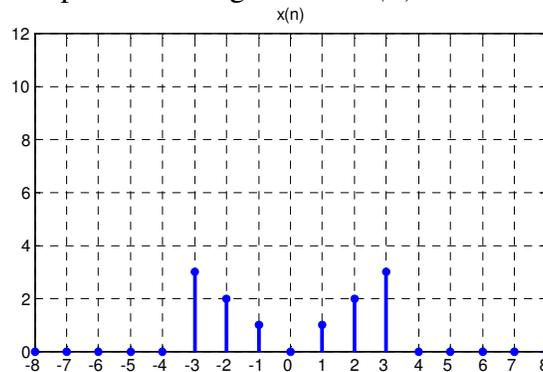


Figura 2.8. Gráfica de  $x(n)$  dado para el ejemplo

A continuación se obtiene la salida para cada inciso:

a) Como  $x(n)$  es simétrica respecto al eje vertical, entonces  $y(n)=x(-n)=x(n)$ . Es decir, esta operación produce una salida idéntica a la entrada en este caso.

b) En cada inciso se procede de la misma manera: para calcular  $y(n)$  se va evaluando la expresión que la define en términos de  $x$  para cada valor de  $n$ ; por ejemplo, en este inciso, como  $y(n)=x(n-1)$ :

para  $n < -2$ : entonces  $n-1 < -3$  por lo tanto  $y(n)=x(n-3)=0$ ,

para  $n = -2$ :  $y(2)=x(-2-1)=x(-3)=3$

para  $n = -1$ :  $y(-1)=x(-1-1)=x(-2)=2$

para  $n = 0$ :  $y(0)=x(0-1)=x(-1)=1$

para  $n = 1$ :  $y(1)=x(1-1)=x(0)=0$

para  $n = 2$ :  $y(2)=x(2-1)=x(1)=1$

para  $n = 3$ :  $y(3)=x(3-1)=x(2)=2$

para  $n = 4$ :  $y(4)=x(4-1)=x(3)=3$

para  $n > 4$ : entonces  $n-1 > 3$ , por lo tanto  $y(n)=0$

Los cálculos anteriores se pueden resumir en la siguiente tabla

<b><math>n</math></b>	...	<b>-5</b>	<b>-4</b>	<b>-3</b>	<b>-2</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	...
$x(n)$	...	0	0	3	2	1	0	1	2	3	0	0	...
$y(n)$	...	0	0	0	3	2	1	0	1	2	3	0	...

Es decir, en la notación de secuencia se tiene que

$$y(n) = \{\dots, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 0, 0, \dots\}$$

↑

Incisos (c), (d), (e) y (f).

Siguiendo del procedimiento mostrado arriba para el inciso (b) se obtiene la siguiente tabla para los demás incisos:

<b><math>n</math></b>	...	<b>-5</b>	<b>-4</b>	<b>-3</b>	<b>-2</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	...
$x(n)$	...	0	0	3	2	1	0	1	2	3	0	0	...
$x(n-1)$	...	0	0	0	3	2	1	0	1	2	3	0	...
$x(n+1)$	...	0	3	2	1	0	1	2	3	0	0	0	...
$[x(n-1) + x(n) + x(n+1)]/3$	...	0	1	5/3	2	1	2/3	1	2	5/3	0	0	...
$\max\{x(n-1), x(n), x(n+1)\}$	...	0	3	3	3	2	1	2	3	3	3	0	...
$\sum_{k=-\infty}^n x(k)$	...	0	0	3	5	6	6	7	9	12	12	12	...

O bien, en notación de secuencia se tiene que

$$x(n-1) = \{\dots, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 0, 0, \dots\}$$

↑

$$x(n+1) = \{\dots, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 0, 0, \dots\}$$

↑

$$[x(n-1) + x(n) + x(n+1)]/3 = \{\dots, 0, 1, \frac{5}{3}, 2, 1, \frac{2}{3}, 1, 2, \frac{5}{3}, 0, \dots\}$$

$$\uparrow$$

$$\max\{x(n-1), x(n), x(n+1)\} = \{\dots, 0, 3, 3, 3, 2, 1, 2, 3, 3, 3, 0, \dots\}$$

$$\uparrow$$

$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) = \{\dots, 0, 3, 5, 6, 6, 7, 9, 12, 12, \dots\}$$

$$\uparrow$$

Los resultados de cada inciso se muestran en forma gráfica en la figura 2.9.

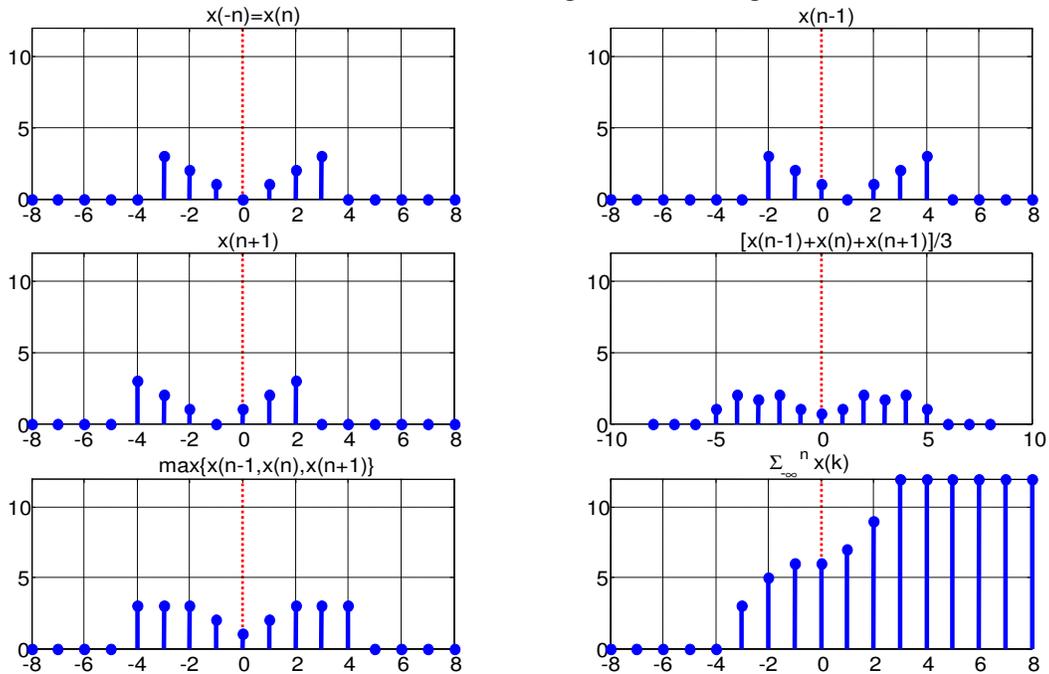


Figura 2.9. Resultados del ejemplo

Un sistema discreto puede programarse en un dispositivo digital, tal como un microprocesador, un microcontrolador, un procesador digital de señales o una computadora, por ejemplo en el siguiente recuadro se muestra el código escrito en Matlab para el promedio móvil:

```

%Promedio móvil de la señal discreta de entrada x:
% Esta función genera la señal discreta y cuyos valores son
% el promedio de cada tres muestras de los valores de x
% (la muestra actual, la anterior y la siguiente)
%
function y=promedio_m(x,x0,xf)
L=length(x);
x=x(:)'; %convierte a renglón
y(1)=(x0+x(1)+x(2))/3; %primer valor de y
y(L)=(x(L-1)+x(L)+xf)/3; %ultimo valor de y
for n=2:L-1
    y(n)=(x(n-1)+x(n)+x(n+1))/3;
end
    
```

2.2.2.- Diagr

En ocasiones resulta conveniente tener una representación gráfica que permita representar la interconexión entre sistemas sencillos para lograr sistemas más complejos. En la figura 2.10 se muestran algunos de los sistemas básicos mediante su representación gráfica:

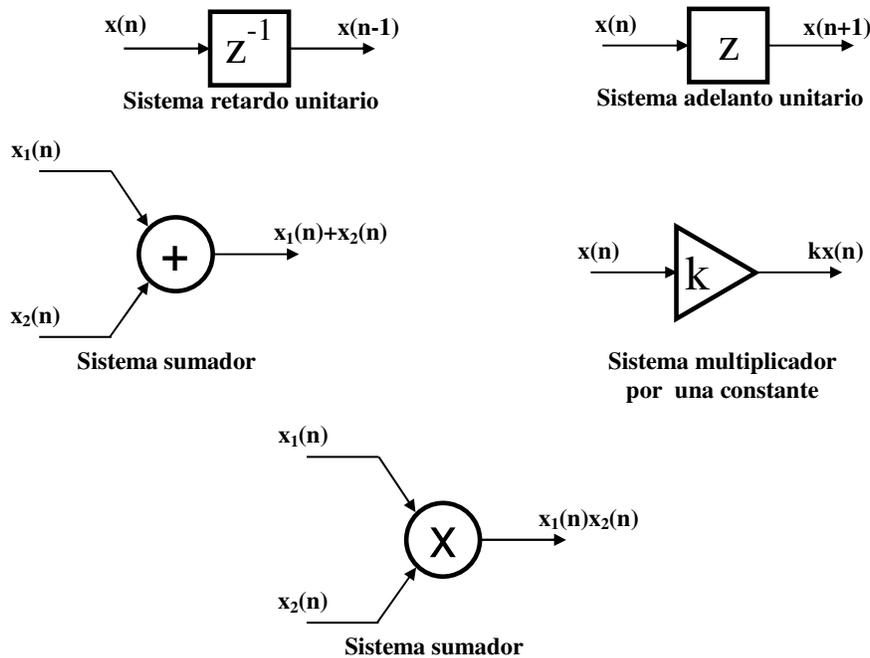


Figura 2.10. Diagrama de bloques de algunos sistemas básicos

**Ejemplo:**

Representar en un diagrama de bloques el sistema cuya relación entrada-salida es la siguiente

$$y(n) = \frac{1}{2} x(n) + \frac{1}{2} x(n-1) + \frac{1}{4} y(n-1)$$

**Solución:**

- 1.- Comenzamos ubicando en el diagrama la señal de entrada  $x(n)$  y la señal de salida  $y(n)$ .
- 2.- Posteriormente insertamos los retardos requeridos para generar  $x(n-1)$ ,  $y(n-1)$  y
- 3.- Finalmente interconectamos mediante los sumadores y multiplicadores por constante que se requieran.

En la figura 2.11 se muestra el resultado final

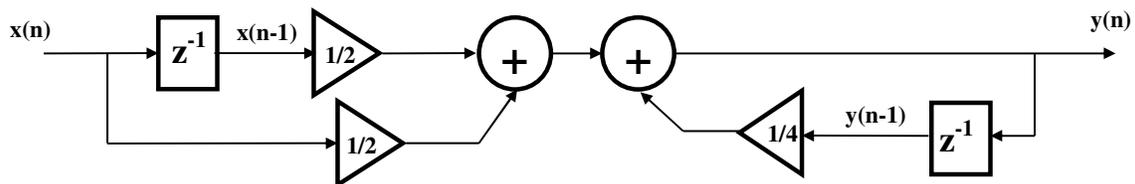


Figura 2.11. Diagrama de bloques del sistema  $y(n) = \frac{1}{2} x(n) + \frac{1}{2} x(n-1) + \frac{1}{4} y(n-1)$

**2.2.3.- Propiedades de los sistemas.**

A continuación se describen algunas de las propiedades más importantes de los sistemas. Estas son propiedades muy generales y no atienden a la naturaleza física del sistema original de donde pudieran provenir las señales en sí, el cual puede ser eléctrico, químico, mecánico, etc. sino más bien al tipo de transformación que realiza el sistema sobre las señales de entrada:

### 2.2.4.- Sistemas con y sin memoria

Un sistema se dice **Sistema estático o sin memoria** si su salida en un instante dado depende de su entrada solamente en ese instante.

**Ejemplo:** Los siguientes son ejemplos de sistemas discretos estáticos descritos por su relación entrada-salida:

$$\begin{aligned}y(n) &= x(n) + 0.5x^2(n) \\y(n) &= x(n) + 2\sin(2\pi n) \\y(n) &= n^2 + \\&\dots, \text{etc.}\end{aligned}$$

Un sistema cuya salida puede depender de entradas en instantes anteriores al actual se denomina **sistema dinámico o sistema con memoria**.

**Ejemplo:** Los siguientes son algunos ejemplos de sistemas discretos dinámicos descritos por su relación entrada-salida

$$\begin{aligned}y(n) &= n + x(n+1) \\y(n) &= y(n-1) + (n-1)x^2(n) \\y(n) &= \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}y(n-1) \\y(n) &= \sum_{k=0}^n x(k) \\&\dots, \text{etc.}\end{aligned}$$

Un sistema dinámico puede tener representaciones diferentes, por ejemplo el último sistema del ejemplo anterior se puede representar también mediante la siguiente relación entrada-salida recursiva:

$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

Es decir, el sistema  $y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)$  se puede ver como la solución de la **ecuación de diferencias**

$y(n) = y(n-1) + x(n)$ , con la condición inicial  $y(0) = 0$ .

Un ejemplo de un sistema analógico con memoria es un simple capacitor C alimentado por una fuente de corriente  $x(t)$ , el cual producirá un voltaje en sus terminales  $y(t)$  dado por

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t x(\tau) d\tau$$

el cual también puede verse como la implementación de la **ecuación diferencial**  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{C} x(t)$  con la condición inicial  $y(0) = 0$ .

### 2.2.5.- Causalidad.

Un sistema se dice **causal** si su salida en cualquier instante depende sólo de los valores de la entrada en el instante actual o en instantes anteriores. A este tipo de sistemas también se les llama **no anticipativos**, ya que la salida del sistema no anticipa valores futuros de la entrada.

☞ **Observación:** Una consecuencia fundamental de que un sistema sea causal es el hecho de que si dos entradas a un sistema causal son idénticas desde las condiciones iniciales hasta un instante  $n_0$  las salidas correspondientes también serán idénticas hasta ese mismo instante.

Un automóvil es un sistema causal, ya que no puede anticipar acciones futuras del conductor, de hecho todos los sistemas físicos que evolucionan con el tiempo son causales, ya que no pueden anticipar acciones de la entrada antes de que estas ocurran. Sin embargo, cuando los valores de la evolución de un sistema se tienen almacenados, como suele ocurrir en señales de voz, imágenes, señales meteorológicas, indicadores económicos, etc. de ninguna manera se está obligado a procesar estos datos en forma causal (es decir, en el orden estricto en que fueron ocurriendo) ya que se tiene la información de todos los instantes de interés en un intervalo dado.

La representación entrada-salida de un sistema causal no puede involucrar valores de la entrada posteriores al tiempo actual  $n$ .

**Ejemplo:** Las siguientes son representaciones entrada salida de algunos sistemas causales:

$$y(n) = n + x(n-1)$$

$$y(n) = y(n-1) + (n+1)x^2(n)$$

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}y(n-1)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)$$

..., etc.

### 2.2.6.- Estabilidad.

Intuitivamente, un **sistema estable** es aquel en que entradas pequeñas producen salidas que no divergen, es decir, salidas acotadas.

Una de las mejores maneras de ilustrar la diferencia entre sistemas estables e inestables es considerando la figura 2.12. En dicha figura se muestra una pelota descansando sobre dos tipos diferentes de terreno. Si se considera que la entrada es un pequeño empujón horizontal y la salida es la posición vertical de la pelota se puede intuir fácilmente que la figura 2.6(a) representa un sistema inestable, mientras que la figura 2.6(b) representa uno estable.

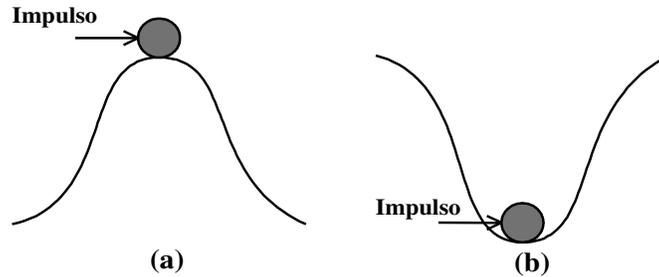


Figura 2.12 a) Sistema inestable. b) sistema estable

Una idea más formal de estabilidad es muy similar, de hecho una de las maneras formales de definir estabilidad, es la **estabilidad entrada acotada - salida acotada** o estabilidad en el sentido B.I.B.O. (Bounded Input - Bounded Output) que nos define un sistema estable como aquel sistema cuya salida esta acotada siempre y cuando su entrada esté acotada.

Es decir, el sistema dado por la relación entrada salida  $y(n)=T[x(n)]$  es BIBO-estable si existen dos constantes positivas  $M_x, M_y$  tales que:

$$|y(n)| < M_y \text{ siempre que } |x(n)| < M_x \quad (2.9)$$

### Ejemplo:

Es fácil verificar (evaluando para cada valor de  $n$ ) que los siguientes sistemas son BIBO-estables

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n-1) \\ y(n) &= [x(n-1)+x(n)]/2 \\ y(n) &= x(n) + \frac{1}{4} y(n-1) \end{aligned}$$

Mientras que los siguientes sistemas son inestables:

$$\begin{aligned} y(n) &= y(n-1) + x(n) \\ y(n) &= y(n-1) + y(n-2) \\ y(n) &= \sum_{k=0}^n x(k) \end{aligned}$$

### 2.2.7.- Invariancia en el tiempo.

Un sistema se dice **invariante en el tiempo** si un retardo en la señal de entrada produce una señal de salida retardada en la misma cantidad de tiempo, es decir, si  $y(n)$  es la salida correspondiente a la entrada  $x(n)$  en un sistema invariante en el tiempo, la entrada  $x(n-n_0)$  producirá la salida  $y(n-n_0)$ . O lo que es lo mismo:

$$T[x(n)] = y(n) \Rightarrow T[x(n-k)] = y(n-k) \text{ para todo } n, k \quad (2.10)$$

En la representación entrada-salida resulta evidente esta característica, ya que en los sistemas variantes en el tiempo, aparece explícitamente la dependencia del tiempo discreto  $n$ , mientras que en los invariantes éste solo aparece en forma implícita por la dependencia que siempre tienen

respecto a  $n$  tanto la entrada  $x(n)$  como la salida  $y(n)$ . Es decir, cuando un sistema invariante en el tiempo se describe por su relación entrada-salida, se obtienen **coeficientes constantes**

**Ejemplos:** Los siguientes sistemas son variantes en el tiempo:

$$\begin{aligned}y(n) &= 0.5ny^2(n-1) + x(n) \\y(n) &= y(n-1) + \sin(n)y(n-2) \\y(n) &= (0.5)^n y(n)\end{aligned}$$

Mientras que los siguientes son invariantes:

$$\begin{aligned}y(n) &= 0.5y^2(n-1) \\y(n) &= y(n-1) + y(n-2) \\y(n) &= (0.5)y(n)\end{aligned}$$

### 2.2.8.- Linealidad.

Un sistema lineal es aquel que cumple con el **principio de superposición**. Dicha propiedad se refiere a que si una entrada es la combinación lineal (suma ponderada) de varias señales, entonces la salida correspondiente es la combinación lineal de las salidas correspondientes a cada una de dichas entradas.

Es decir, un sistema lineal cuya relación entrada salida está dada por  $y(n) = T[x(n)]$ , cumple con la siguiente relación

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \quad (2.11)$$

donde  $a, b$  son constantes cualesquiera.

La relación entrada-salida de los sistemas lineales sólo contiene operaciones de suma/resta, y multiplicación por constante.

**Ejemplo:** Los sistemas dados por las siguientes expresiones son lineales

$$\begin{aligned}y(n) &= 0.5y(n-1) + x(n) \\y(n) &= y(n-1) + y(n-2) \\y(n) &= (0.5)y(n)\end{aligned}$$

Mientras que los siguientes son no-lineales:

$$\begin{aligned}y(n) &= 0.5y^2(n-1) + x(n) \\y(n) &= y(n-1)y(n-2) \\y(n) &= (0.5)^{y(n)}\end{aligned}$$

☞ **Observación.** Pudiera pensarse que el sistema definido como  $y(n) = ax(n) + b$ , donde  $a, b$  son constantes es lineal, sin embargo esto no es cierto. Sin embargo, se dice que es un sistema **incrementalmente lineal o afín**, ya que los incrementos de la salida responden de manera lineal a incrementos de la entrada, en efecto, es fácil ver que los incrementos

$$\begin{aligned}y_I(n) &= y(n) - y(n_0), \\x_I(n) &= x(n) - x(n_0)\end{aligned}$$

cumplen con la relación  $y_I(n) = ax_I(n)$ , el cual si es un sistema lineal.

El enfoque principal de este curso es sobre los sistemas discretos que poseen estas dos últimas propiedades, es decir, los **sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo**, o simplemente DSLIT, por sus iniciales.

## 2.3.- Análisis de Sistemas Discretos Lineales e Invariantes en el Tiempo

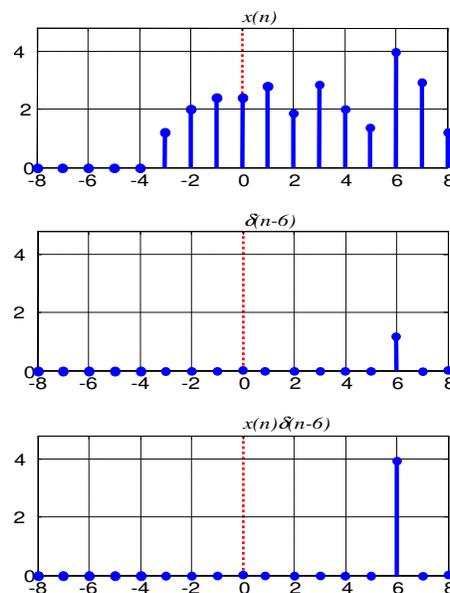
*El problema de análisis* de un sistema consiste en obtener la respuesta del sistema a una entrada dada. Existen dos métodos para abordar este problema:

- Obtener la respuesta del sistema a una señal de prueba elemental, descomponer la entrada en términos de estas entradas elementales y aplicar la propiedad de linealidad.
- Obtener la solución de la ecuación entrada-salida del sistema (ecuación de diferencias)

El primer método se aborda en a continuación, mientras que el segundo se aborda en la última sección del capítulo.

### 2.3.1.- Descomposición de una señal discreta en términos de impulsos

Una de las señales más sencillas de generar es el **impulso unitario**, el cual se definió anteriormente. La respuesta de un SLIT a ésta señal lo caracteriza completamente, es decir, la respuesta de un SLIT a cualquier tipo de entrada puede ser expresada en términos de su **respuesta al impulso**.



**Figura 2.13.** Extracción de la muestra  $x(6)$  mediante la operación  $x(n)\delta(n-6)$ .

Para verificar lo anterior primeramente expresemos una señal arbitraria como una sumatoria de impulsos, para ello notemos que una secuencia arbitraria  $x(n)$  cumple con la siguiente propiedad:

$$x(n)\delta(n-k) = x(k)\delta(n-k) \quad (2.12)$$

puesto que el impulso unitario retardado  $\delta(n-k)$  vale cero en todos lados excepto en  $n=k$ , en donde vale 1, pero en es instante justamente  $x(n)$  vale  $x(k)$ . El resultado de esta operación se ilustra en forma gráfica en la figura 2.13. para  $k=6$ .

Es decir, al multiplicar una señal  $x(n)$  por  $\delta(n-k)$ , extraemos la muestra  $x(k)$ . Si repetimos este proceso para todos los valores de  $k$  podremos expresar la señal original  $x(n)$  como

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (2.13)$$

La expresión anterior nos dice que podemos expresar cualquier señal discreta como una sumatoria ponderada de impulsos desplazados.

**Ejemplo:** Expresar la siguiente señal discreta como sumatoria ponderada de impulsos desplazados:

$$x(n) = \{1, -1, 3, 1, -2\}$$

↑

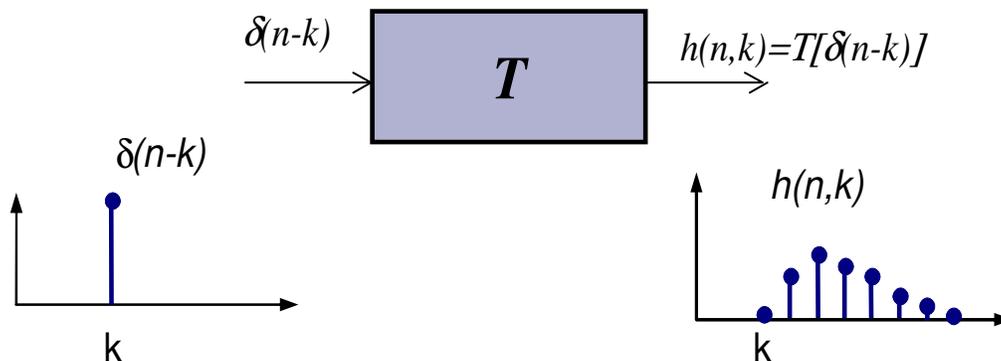
**Solución.**

$$x(n) = \delta(n+1) - \delta(n) + 3\delta(n-1) + \delta(n-2) - 2\delta(n-3)$$

### 2.3.2.- Respuesta de un DSLIT a entradas arbitrarias: La Convolución.

A continuación consideraremos el experimento mostrado en la figura 2.14 que consiste en aplicar un impulso unitario a un sistema discreto  $T$  en el instante  $n=k$ . Denotaremos la respuesta del sistema a este impulso unitario por la función:  $h(n,k)$ . Es decir,

$$h(n,k) = T[\delta(n-k)] \quad (2.14)$$



**Figura 2.14** Respuesta al impulso unitario

De acuerdo a la ecuación (2.13), una entrada discreta cualquiera  $x(n)$  puede ser expresada como el siguiente tren de impulsos modulado en amplitud:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Por lo tanto, la respuesta del sistema  $y(n) = T[X(n)]$ , se puede expresar como sigue:

$$y(n) = T \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) \right]$$

Lo cual, si  $T$  es un sistema Lineal se puede escribir como

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[\delta(n-k)]$$

Es decir,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n, k) \quad (2.15)$$

Si además,  $T$  es un sistema invariante en el tiempo, si  $h(n)$  es la respuesta al impulso  $\delta(n)$ , entonces  $h(n-k)$  será la respuesta al impulso  $\delta(n-k)$ , es decir, para un DSLIT:

$$h(n, k) = h(n-k) \quad (2.16)$$

y por lo tanto, para un DSLIT

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \quad (2.17)$$

A la sumatoria anterior se le llama **sumatoria de convolución**, es decir:

☞ La respuesta de un DSLIT a una entrada arbitraria  $x(n)$  es la convolución de la entrada con la respuesta al impulso  $h(n)$ .

En ocasiones se la sumatoria de convolución se denota como sigue

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) = x(n) * h(n) \quad (2.18)$$

es fácil demostrar que la convolución es conmutativa, es decir,

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

o sea que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

☞ **Observación:** En el caso continuo se tiene un resultado completamente similar. Si  $h(t)$  es la respuesta al impulso unitario continuo  $\delta(t)$  del sistema continuo, la respuesta a una señal cualquiera  $x(t)$ , está dada por la **integral de convolución**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

**Ejemplo:** Si la respuesta al impulso de un DSLIT es

$$h(n) = \{1, 2, 1, -1\}$$

↑

Determina la respuesta del sistema ante la entrada

$$h(n) = \{1, 2, 3, 1\}$$

↑

**Solución:** En la siguiente tabla se muestran los pasos intermedios para calcular la sumatoria de convolución  $y(n)=x(n)*h(n)$ :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^3 x(k)h(n-k)$$

$$y(0)=x(0)h(0)=1$$

$$y(1)=x(0)h(1)+x(1)h(0)=4$$

$$y(2)=x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0)=8$$

$$y(3)=x(0)h(3)+x(1)h(2)+x(2)h(1)+x(3)h(0)=8$$

$$y(4)=x(1)h(3)+x(2)h(2)+x(3)h(1) =3$$

$$y(5)=x(2)h(3)+x(3)h(1)=-2$$

$$y(6)=x(3)h(3)=-1$$

k	0	1	2	3	
x(k)	1	2	3	1	
n	h(n)	h(n-1)	h(n-2)	h(n-3)	y(n)
0	1	0	0	0	1
1	2	1	0	0	4
2	1	2	1	0	8
3	-1	1	2	1	8
4	0	-1	1	2	3
5	0	0	-1	1	-2
6	0	0	0	-1	-1
7	0	0	0	0	0

Es decir,

$$y(n) = \{1, 4, 8, 8, 3, -2, -1\}$$

↑

☞ **Observación:** La convolución de dos secuencias finitas, una de longitud N y la otra de longitud M, produce otra secuencia finita de longitud N+M-1

### 2.3.2.1.- Respuesta al impulso de sistemas causales

Como la respuesta  $y(n)$  de un sistema causal no puede depender de información anterior al instante  $n$ , su respuesta al impulso  $h(n-k)$  debe ser cero para  $n < k$ . Por lo tanto

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

es decir, para sistemas causales

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) \tag{2.19}$$

☞ **Definición:** Se dice que una señal  $x(n)$  es causal si puede ser la respuesta al impulso de un sistema causal, es decir, si  $x(n)=0$  para todo  $n < 0$ .

De acuerdo a la definición anterior y de la ecuación (2.19) la respuesta de un sistema causal a una señal causal es

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) \quad (2.20)$$

**Ejemplo:** Determinar la respuesta al escalón unitario  $u(n)$  del sistema cuya respuesta al impulso unitario es

$$h(n) = a^n u(n).$$

**Solución:**

Como el sistema y la entrada son causales podemos usar la ecuación (2.20). Además  $u(n)=1$  para  $n \geq 0$ , por lo tanto:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)u(n-k) = \sum_{k=0}^n a^k$$

es decir,

$$y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

### 2.3.2.2.- Respuesta al impulso y Estabilidad

Podemos establecer la estabilidad BIBO de un sistema DSLIT a partir de su respuesta al impulso  $h(n)$  como sigue:

Suponiendo que el sistema es BIBO estable, deberá producir una salida  $y(n)$  acotada para cualquier entrada acotada  $x(n)$ , es decir, existen dos constantes finitas  $M_x, M_y$  tales que

$$|x(n)| < M_x, \quad |y(n)| < M_y \quad \text{para todo valor de } n.$$

pero en términos de la respuesta al impulso,

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right|$$

y de la desigualdad del triángulo, el valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de sus valores absolutos, por lo tanto

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)x(n-k)|$$

Además el valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos, por lo tanto

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

pero como  $x(n)$  está acotada por  $M_x$ :

$$|y(n)| < M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

Es decir, para que  $y(n)$  esté acotada se requiere que el lado derecho de la desigualdad anterior sea un número finito, es decir, se requiere que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (2.21)$$

La condición anterior se enuncia diciendo que la respuesta al impulso  $h(n)$  es **absolutamente sumable**. Es decir:

☞ Un DSLIT es BIBO estable si su respuesta al impulso es absolutamente sumable.

La condición (2.21) no solo es suficiente, también es necesaria, esta condición tiene dos consecuencias que se pueden demostrar con un poco de análisis:

- i. Para que  $h(n)$  sea absolutamente sumable es necesario que  $h(n)$  tienda a cero conforme  $n$  tiende a infinito.
- ii. Si  $h(n)$  es absolutamente sumable cualquier entrada de duración finita al sistema producirá una salida  $y(n)$  que tiende a cero conforme  $n$  tiende a infinito.

### Ejemplo:

Obtener el rango de valores de la constante  $a$  para el cual es estable el DSLIT cuya respuesta al impulso es

$$h(n) = a^n u(n)$$

### Solución:

Como el sistema es causal, la sumatoria debe comenzar a partir de  $k=0$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| &= \sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k \\ &= 1 + |a| + |a|^2 + |a|^3 + \dots \end{aligned}$$

La cual es una serie Geométrica con razón de crecimiento  $|a|$ , la suma de sus primeros  $N$  términos es

$$S_N = \frac{1 - |a|^{N+1}}{1 - |a|}$$

Para que el límite de  $S_N$  cuando  $N$  tiende a infinito exista, se requiere que

$$|a| < 1$$

así  $|a|^{N+1}$  tiende a cero conforme  $N$  tiende a infinito y por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1 - |a|}$$

es decir, el sistema es BIBO estable si  $|a| < 1$ .

### 2.3.2.3.- Sistemas FIR y sistemas IIR

Los sistemas DSLIT se pueden clasificar en dos tipos de acuerdo a la duración de su respuesta al impulso:

 **Sistemas IIR.**- Respuesta al impulso de duración infinita.

 **Sistemas FIR.**- Respuesta al impulso de duración finita,

Es decir, la respuesta al impulso  $h(n)$  de un sistema FIR es cero fuera de un intervalo finito de valores de  $n$ , es decir,

$$h(n) = 0 \text{ para } n < 0 \text{ y } n \geq N$$

por lo tanto, la convolución para un sistema FIR toma la forma

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

en otras palabras, la respuesta del sistema se obtiene ponderando las  $N$  muestras más recientes:  $x(n)$ ,  $x(n-1)$ , ...,  $x(n-N+1)$  mediante los valores de la respuesta al impulso:  $h(0)$ ,  $h(1)$ , ...,  $h(N-1)$  y sumando estas muestras ponderadas.

Es decir, el sistema se comporta como una *ventana* deslizante que sólo permite ver la  $N$  muestra más recientes de la entrada al momento de calcular la salida e ignora las muestras anteriores, por lo tanto, un sistema FIR tiene una *memoria finita*. A diferencia de un sistema IIR, el cual requiere una memoria infinita para tomar en cuenta una infinidad de valores pasados de la entrada y poder responder de acuerdo a la fórmula de convolución (2.17)

#### 2.4.- Ecuaciones de diferencias para un DSLIT y su solución.

La relación entrada salida de un DSLIT en general se puede expresar en la forma de la siguiente *ecuación de diferencias lineal de orden N*:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (2.22)$$

o bien,

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (2.23)$$

o lo que es lo mismo:

$$a_N y(n-N) + a_{M-1} y(n-(N-1)) + \dots + a_1 y(n-1) + y(n) = b_M x(n-M) + b_{M-1} x(n-(M-1)) + \dots + b_1 x(n-1) + b_0 x(n) \quad (2.24)$$

Donde  $a_1, a_2, \dots, a_N$  y  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_M$  son coeficientes constantes.

Se supone que  $M \leq N$ .

Para obtener la solución general  $y(n)$  de la ecuación de diferencias anterior descompondremos (por superposición) la solución en dos partes:

$$y(n) = y_H(n) + y_p(n) \quad (2.25)$$

Donde a la parte  $y_H(n)$  se denomina *solución homogénea* y corresponde a la solución de la ecuación de diferencias bajo entrada nula. A la parte  $y_p(n)$  se le denomina *solución particular* y corresponde a la solución de la ecuación de diferencias bajo condiciones iniciales cero.

Es decir, la respuesta del DSLIT descrito por la ecuación de diferencias está compuesto por su respuesta a las condiciones iniciales bajo entrada cero y su respuesta a la entrada bajo condiciones iniciales cero.

### 2.4.1.- Solución Homogénea de la ecuación de diferencias

Para obtener la parte homogénea de la solución supondremos que la entrada es nula todo el tiempo, es decir  $x(n)=0$  para todo  $n$ . Entonces obtenemos la *ecuación homogénea de diferencias*:

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = 0 \quad (2.26)$$

El procedimiento para resolver la ecuación anterior es muy similar al usado para resolver ecuaciones diferenciales: Supondremos que la siguiente solución exponencial satisface la ecuación (2.26):

$$y_H(n) = \lambda^n \quad (2.27)$$

sustituyendo esta solución en (2.26) obtenemos

$$\lambda^n + \sum_{k=1}^N a_k \lambda^{n-k} = 0$$

es decir,

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_N \lambda^{n-N} = 0$$

o bien

$$\lambda^{n-N} (\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N) = 0 \quad (2.28)$$

A la ecuación anterior se le denomina *ecuación característica* y el polinomio del paréntesis se denomina *polinomio característico* del sistema. Por lo tanto, las raíces del polinomio característico son los valores de  $\lambda$  para los cuales la ecuación (2.27) es solución de (2.26).

Como en general un polinomio de grado  $N$  tiene  $N$  raíces:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ , suponiendo que todas son diferentes se tendrán  $N$  soluciones de la homogénea, por lo tanto, por superposición, cualquier suma ponderada (combinación lineal) de estas  $N$  soluciones también será solución de la homogénea:

$$y_H(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_N \lambda_N^n \quad (2.29)$$

Las constantes  $C_1, C_2, \dots, C_N$ . Se determinan a partir de las condiciones iniciales.

#### Ejemplo:

Obtener la respuesta a entrada nula del sistema descrito por la siguiente ecuación de diferencias

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = 0 \quad (2.30)$$

**Solución.** La ecuación característica es

$$\lambda^{n-2} (\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$$

la cual tiene dos raíces:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 4$ , por lo tanto la solución general de la homogénea es

$$y(n) = C_1 (-1)^n + C_2 (4)^n \quad (2.31)$$

Para calcular las constantes  $C_1$  y  $C_2$  adecuadas evaluamos la solución obtenida en los dos instantes de muestreo iniciales:

$$y(0) = C_1(-1)^0 + C_2(4)^0 = C_1 + C_2$$

$$y(1) = C_1(-1)^1 + C_2(4)^1 = -C_1 + 4C_2$$

Por otro lado, de la ecuación de diferencias original (2.30), obtenemos

$$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2)$$

$$y(1) = 3y(0) + 4y(-1) = 3[3y(-1) + 4y(-2)] + 4y(-1)$$

es decir,

$$y(1) = 13y(-1) + 12y(-2)$$

igualando estos dos conjuntos de ecuaciones obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$C_1 + C_2 = 3y(-1) + 4y(-2)$$

$$-C_1 + 4C_2 = 13y(-1) + 12y(-2)$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$C_1 = -\frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2)$$

$$C_2 = \frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2)$$

sustituyendo en la solución de la homogénea (2.31) tenemos finalmente que la respuesta a entrada nula es para todo  $n \geq 0$ :

$$y(n) = \left[-\frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2)\right](-1)^n + \left[\frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2)\right](4)^n \quad (2.32)$$

### 2.4.2.- Solución particular de la ecuación de diferencias

Un procedimiento para calcular la solución particular está basado en proponer una solución particular que tenga una forma similar a la de la entrada, con algunas constantes indeterminadas que se deberán calcular para que la solución propuesta satisfaga la ecuación de diferencias

#### Ejemplo:

Se determinará la solución particular de la siguiente ecuación de diferencias de primer orden

$$y(n) + ay(n-1) = x(n), \text{ donde } |a| < 1 \quad (2.33)$$

cuando la entrada es un escalón unitario, es decir,  $x(n) = u(n)$ .

#### Solución:

Se propone que la solución particular será una constante para  $n \geq 0$ , ya que la entrada es constante para  $n \geq 0$ , es decir, se propone

$$y_p(n) = Ku(n)$$

donde  $K$  es una constante a determinar.

Para determinar el valor adecuado de  $K$  se sustituye la solución propuesta en la ecuación de diferencias, obteniendo

$$Ku(n) + aKu(n-1) = u(n)$$

Evaluando para  $n \geq 1$  en donde ningún término se anula, se obtiene

$$K + aK = 1$$

de donde

$$K = \frac{1}{1+a}$$

con lo cual la solución particular es

$$y_p(n) = \frac{1}{1+a} u(n) \quad (2.34)$$

Dependiendo de la forma de la entrada se deberán proponer formas correspondientes para la solución particular, en la siguiente tabla se muestran algunos casos de señales de entrada y la forma de la solución particular:

Señal de entrada $x(n)$	Solución particular $y_p(n)$
$A$ (constante)	$K$
$A\delta(n)$	Cero
$AM^n$	$KM^n$
$An^M$	$K_0n^M + K_1n^{M-1} + \dots + K_M$
$A^n n^M$	$A^n (K_0n^M + K_1n^{M-1} + \dots + K_M)$
$\begin{cases} A \cos(\omega_0 n) \\ A \sin(\omega_0 n) \end{cases}$	$K_1 \cos(\omega_0 n) + K_2 \sin(\omega_0 n)$

### 2.4.3.- Solución total de la ecuación de diferencias

Combinando los procedimientos anteriores para obtener las soluciones homogénea  $y_H(n)$  y particular  $y_p(n)$ , podemos obtener por superposición la solución total de la ecuación de diferencias, simplemente sumando estas dos de acuerdo a la ecuación (2.25).

#### Ejemplo:

Obtener la solución total de la siguiente ecuación de diferencias

$$y(n) + ay(n-1) = x(n), \text{ donde } |a| < 1$$

considerando la entrada  $x(n) = (0.5)^n u(n)$ .

#### Solución.

La solución homogénea es fácil de obtener observando que la ecuación característica del sistema es

$$\lambda^{n-1}(\lambda + a) = 0$$

de donde  $\lambda = -a$  es la única raíz del polinomio característico y la solución de la homogénea queda

$$y_H(n) = C(-a)^n$$

donde la constante  $C$  se determinará para satisfacer la condición inicial en  $y(-1)$ .

Para la solución particular proponemos la forma  $y_p(n) = K(0.5)^n u(n)$ , y sustituyendo en la ecuación de diferencias para  $n \geq 0$  se obtiene

$$K(0.5)^n + aK(0.5)^{n-1} = (0.5)^n$$

es decir,

$$K = \frac{1}{1+2a}$$

por lo tanto, la solución particular queda

$$y_p(n) = \frac{1}{1+2a}(0.5)^n \text{ para } n \geq 0$$

Y la solución total será, para  $n \geq 0$ :

$$y(n) = y_H(n) + y_p(n) = C(-a)^n + \frac{1}{1+2a}(0.5)^n$$

Para determinar el valor de C evaluemos en  $n=-1$ :

$$y(-1) = C(-a)^{-1} + \frac{1}{1+2a}(0.5)^{-1}$$

es decir,

$$y(-1) = -\frac{C}{a} + \frac{2}{1+2a}$$

despejando C obtenemos

$$C = \frac{2a}{1+2a} - ay(-1)$$

con lo cual la solución total queda

$$y(n) = \left[ \frac{2a}{1+2a} - ay(-1) \right] (-a)^n + \frac{1}{1+2a}(0.5)^n$$

en el caso particular de condición inicial cero  $y(-1)=0$ :

$$y(n) = \frac{1}{1+2a} \left[ 2a(-a)^n + (0.5)^n \right]$$

lo cual se puede escribir como

$$y(n) = \frac{2^{-n}}{1+2a} \left[ 2a(-2a)^n + 1 \right]$$



# Capítulo 3

## La Transformada Z

El origen de la *Transformada Z* se remonta a alrededor de 1730, cuando Abraham De Moivre introduce el concepto de función generadora de secuencias, sin embargo, no fue sino hasta 1947 que fue presentada por W. Hurewicz como un método para transformar señales muestreadas con la idea de resolver ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes. En 1952 el grupo de control de la Universidad de Columbia encabezado por John R. Raggazini, (que incluía a L. A. Zadeh, E. I. Jury, R. E. Kalman, J. E. Bertram, B. Friedland y G. F. Franklin) denomina al método de Hurewicz como Transformada “Z”.

### 3.1.- Definición.

La *transformada Z* de una señal discreta  $x(n)$  se define como la serie de potencias

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.1)$$

donde  $z$  es una variable compleja.

La ecuación (3.1) a veces se denomina *Transformada Z directa* porque transforma la señal de tiempo discreto  $x(n)$  en la señal de variable compleja  $X(z)$ . El procedimiento inverso para recuperar la señal discreta  $x(n)$  a partir de  $X(z)$  se denomina *transformada Z inversa*.

✂ **Notación:** Por conveniencia, en ocasiones denotaremos  $X(z)$  como

$$x(z) = Z\{x(n)\} \quad (3.2)$$

Debido a que la transformada  $Z$  está definida mediante una serie infinita de potencias de  $z$ , puede ocurrir que la serie sea divergente, en ese caso  $X(z)$  no existe.  $X(z)$  solo existe para aquellos valores de  $z$  para los cuales la serie converge.

📖 Al conjunto de valores de  $z$  para los cuales  $X(z)$  existe se le llama *Dominio de Convergencia* de la Transformada y se abreviará ROC de aquí en adelante.

### Ejemplos:

Calcular  $X(z)$  y la ROC para las siguientes señales discretas de duración finita:

$$1) \quad x_1(n) = \{1, 2, 4, 5\}$$

↑

$$X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 5z^{-3}, \text{ ROC} = \text{todo el plano } z \text{ excepto } z=0.$$

$$2) \quad x_2(n) = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$X_2(z) = z^2 + 2z^1 + 4 + 5z^{-1}, \text{ ROC} = \text{todo el plano } z \text{ excepto } z = \infty \text{ y } z = 0.$$

$$3) \quad x_3(n) = \delta(n)$$

$$X_3(z) = 1, \text{ ROC} = \text{todo el plano } z.$$

$$4) \quad x_4(n) = \delta(n-k)$$

$$X_4(z) = z^{-k}, \text{ ROC} = \text{todo el plano } z \text{ excepto } z = 0.$$

$$5) \quad x_5(n) = \delta(n+k)$$

$$X_5(z) = z^k, \text{ ROC} = \text{todo el plano } z \text{ excepto } z = \infty.$$

**Ejemplo:** Calcula la transformada Z de la siguiente señal causal de duración infinita:

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

**Solución:**

De la definición obtenemos

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

La cual es una serie geométrica con razón  $az^{-1}$ , la cual converge al valor

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (3.4)$$

siempre y cuando  $|az^{-1}| < 1$ , es decir, la ROC es  $|z| > |a|$

**Ejemplo:** Encuentre la transformada Z de un escalón unitario  $u(n)$ :

**Solución:** Esto corresponde al ejemplo anterior en el caso  $a=1$ , por lo tanto

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (3.5)$$

y la ROC es  $|z| > 1$ .

### Forma general de la ROC.

Reconsideremos ahora la transformada Z de la señal discreta  $x(n)$ , reescribiendo la variable compleja  $z$  en su forma polar, es decir,  $z = re^{j\theta}$ , entonces  $X(z)$  puede ser expresada como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-jn\theta} \quad (3.6)$$

En la ROC de  $X(z)$  se cumple que  $|X(z)| < \infty$ , pero

$$\begin{aligned} |X(z)| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-jn\theta} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}e^{-jn\theta}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \end{aligned} \quad (3.7)$$

☞ Es decir,  $|X(z)|$  es finita si la secuencia  $x(n)r^{-n}$  es absolutamente sumable. Por lo tanto, el problema de hallar la ROC para  $X(z)$  es el problema de determinar el rango de valores de  $r$  para los cuales la secuencia  $x(n)r^{-n}$  es absolutamente sumable.

Podemos indagar más a fondo separando la sumatoria para  $X(z)$  en dos partes:

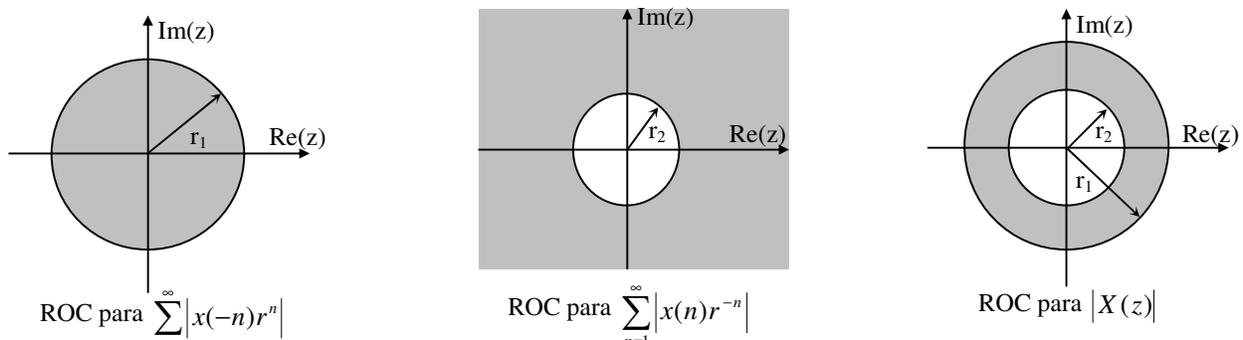
$$X(z) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}|$$

por lo tanto,

$$X(z) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \quad (3.8)$$

Por lo tanto, si  $X(z)$  existe, ambas sumatorias deben converger. La primera sumatoria converge si existe un rango de valores suficientemente pequeños de  $r$  para que la secuencia  $x(-n)r^n$  sea absolutamente sumable, es decir, la ROC para la primera sumatoria consiste de los puntos dentro de algún círculo de radio finito  $r_1$  de manera que  $r < r_1$ . En forma similar, la ROC para la segunda sumatoria consiste en los puntos afuera de algún círculo de radio  $r_2$  de manera que  $r$  sea suficientemente grande ( $r > r_2$ ) para que la secuencia  $x(n)r^{-n}$  sea absolutamente sumable. Ver figura 3.1.

Por lo anterior, la única manera en que las dos sumatorias pueden converger es en la región anular  $r_2 < r < r_1$ , La cual será una región no vacía si  $r_2 < r_1$ , de lo contrario, esta región es vacía y  $X(z)$  no existe.



**Figura 3.1.** ROC para  $|X(z)|$  y para sus dos componentes.

**Ejemplo:** Calcula la transformada Z de la siguiente señal anticausal de duración infinita:

$$x(n) = -a^n u(-n-1) = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -a^n & n \leq -1 \end{cases} \quad (3.9)$$

**Solución:**

De la definición obtenemos

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-a^n) z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n \\ &= -a^{-1}z \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n \end{aligned}$$

La última sumatoria es una serie geométrica con razón  $a^{-1}z$ , entonces

$$X(z) = -a^{-1}z \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad (3.10)$$

siempre y cuando  $|a^{-1}z| < 1$ , es decir, la ROC es  $|z| < |a|$ .

**Observación:** Las dos señales de los ejemplos anteriores son diferentes, pero tienen transformadas Z idénticas, la diferencia solo está en sus ROC. Mientras que para el ejemplo de la señal causal  $x(n)=a^n u(n)$  la ROC es el exterior de un círculo de radio  $|a|$ , para la señal anticausal  $x(n)=-a^n u(-n-1)$ , la ROC es el interior de un círculo de radio  $|a|$ .

En general, una expresión para la transformada Z no corresponde a una única la señal en el tiempo. Esta ambigüedad se evita al especificar tanto la expresión en el dominio Z como la ROC correspondiente.

**Ejemplo:** Determine la transformada Z de la siguiente señal de duración infinita.

$$x(n) = a^n u(n) + b^n u(-n-1)$$

**Solución:** de acuerdo a los ejemplos anteriores

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-bz^{-1}}$$

y la ROC será el conjunto de puntos del plano Z definidos por  $|a| < |z| < |b|$  el cual es un anillo como el mostrado en la figura 3.2 solo si  $|a| \leq |b|$  de lo contrario es un conjunto vacío y  $X(z)$  no existe.

En este ejemplo se verifica una característica de la ROC para una señal de duración infinita a ambos lados (tiempo positivo y tiempo negativo): Si existe alguna ROC no vacía en este caso esta ROC tiene la forma de una región anular en el plano Z.

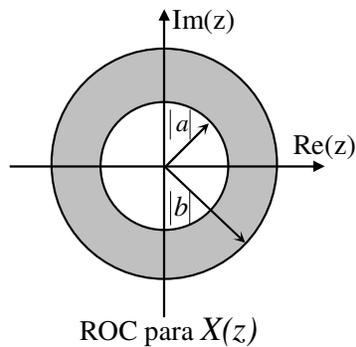


Figura 3.2. ROC para  $X(z)$  de  $x(n) = a^n u(n) + b^n u(-n-1)$

### 3.2.- Propiedades de la Transformada Z

A continuación se presentan algunas de las propiedades que tiene la transformada Z y gracias a las cuales se ha convertido en una herramienta muy útil para el estudio de las señales y sistemas en tiempo discreto.

#### 3.2.1.- Linealidad

Esta propiedad es una consecuencia directa de la definición, ya que la transformada se define como una sumatoria y las sumatorias poseen la propiedad de linealidad:

$$\text{Si } x(n) = ax_1(n) + bx_2(n), \text{ entonces } X(z) = aX_1(z) + bX_2(z) \quad (3.11)$$

Donde  $a, b$  son dos constantes cualesquiera. La ROC de  $X(z)$  será la intersección de las ROC para  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ .

La propiedad de linealidad se extiende para cualquier número de sumandos en la combinación lineal.

**Ejemplo.** Sea  $x(n) = [2(2)^n - 5(3)^n]u(n)$ . Por la propiedad de linealidad  $X(z) = 2Z\{(2)^n u(n)\} - 5Z\{(3)^n u(n)\}$ , es decir,  $X(z) = \frac{2}{1-2z^{-1}} - \frac{5}{1-3z^{-1}}$ . La ROC de  $X(z)$  es la intersección de la ROC de cada sumando, es decir, es la intersección de  $|z| > 2$  con  $|z| > 3$ , es decir, la ROC de  $X(z)$  es  $|z| > 3$ .

**Ejemplo.** La transformada z de

$$x(n) = (\sin(\omega_0 n))u(n) \quad (3.12)$$

se puede calcular usando la propiedad de linealidad a partir de la fórmula de Euler:



$$Z[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad (3.15)$$

y la ROC se transforma en  $|a|r_1 < |z| < |a|r_2$

**Demostración:** De la definición  $Z[a^n x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (a^{-1} z)^{-n} = X(a^{-1} z)$$

y si la ROC de  $X(z)$  era  $r_1 < |z| < r_2$ , la ROC de  $X(a^{-1} z)$  será  $r_1 < |a^{-1} z| < r_2$ , es decir,  $|a|r_1 < |z| < |a|r_2$ .

**Ejemplo:** La transformada z de la señal

$$x(n) = a^n \sin(\omega_0 n) u(n)$$

se obtiene usando la propiedad anterior y recordando que  $Z[\sin(\omega_0 n) u(n)] = \frac{\sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$  con ROC  $|z| > 1$ , entonces

$$X(z) = \frac{a \sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}} \text{ con ROC } |z| > |a|.$$

### 3.2.4.- Reversión de tiempo.

Si  $x(n)$  tiene como transformada z a  $X(z)$  con ROC  $r_1 < |z| < r_2$  entonces

$$Z[x(-n)] = X(z^{-1}) \quad (3.16)$$

y la ROC se transforma en  $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$ .

**Demostración:** De la definición  $Z[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n}$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) (z^{-1})^{-i} = X(z^{-1})$$

y si la ROC de  $X(z)$  era  $r_1 < |z| < r_2$ , la ROC de  $X(z^{-1})$  será  $r_1 < |z^{-1}| < r_2$ , es decir,  $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$ .

**Ejemplo.** Determinar la transformada z de la señal

$$x(n) = u(-n).$$

**Solución.** Como ya se obtuvo la transformada z de  $u(n)$ :  $U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$  con ROC  $|z| > 1$ , de acuerdo a la propiedad de reversión de tiempo se tendrá que  $X(z) = \frac{1}{1-z}$  con ROC  $|z| < 1$

### 3.2.5.- Diferenciación en el dominio z.

Si  $x(n)$  tiene como transformada z a  $X(z)$ , entonces

$$Z[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz} \quad (3.17)$$

y ambas transformada tienen la misma ROC.

**Demostración:** De la definición  $\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right]$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -nx(n)z^{-n-1}$$

$$= -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nx(n)]z^{-n} = -z^{-1} Z[nx(n)]$$

**Ejemplo.** Determine la transformada z de la señal

$$x(n) = na^n u(n) \quad (3.18)$$

**Solución.** Expresamos la señal como  $x(n) = nx_1(n)$ , donde  $x_1(n) = a^n u(n)$ , entonces

$$X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \text{ con ROC } |z| > |a|.$$

Usando la propiedad de diferenciación:

$$X(z) = -z \frac{dX_1(z)}{dz} = z \frac{az^{-2}}{(1-az^{-1})^2}$$

es decir,

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad (3.19)$$

Además en el caso particular en el que  $a=1$ , obtenemos la transformada z de una señal rampa unitaria:

$$Z[nu(n)] = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad (3.20)$$

**Ejemplo.** Determine la señal  $x(n)$  cuya transformada z está dada por

$$X(z) = \ln(1+az^{-1}), \text{ con ROC } |z| > |a|.$$

**Solución.** Derivando respecto a z:

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}$$

entonces

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = az^{-1} \left[ \frac{1}{1+az^{-1}} \right]$$

La expresión entre corchetes es la transformada z de  $(-a)^n u(n)$  en la ROC  $|z| > |a|$ , la multiplicación por  $z^{-1}$  implica un retardo unitario, es decir,  $x(n) = (-a)^{n-1} u(n-1)$ , finalmente, por la propiedad de diferenciación en el dominio z obtenemos:

$$nx(n) = a(-a)^{n-1} u(n-1)$$

es decir,

$$x(n) = (-1)^{n-1} \frac{a^n}{n} u(n-1)$$

### 3.2.6.- Transformada de la convolución.

Si la transformada z de  $x_1(n)$  es  $X_1(z)$  y la transformada z de  $x_2(n)$  es  $X_2(z)$ , entonces

$$Z[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(z)X_2(z) \tag{3.21}$$

cuya ROC es al menos la intersección de las ROC de  $X_1(z)$  y de  $X_2(z)$ .

**Demostración.** De la definición de convolución

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

Entonces,

$$Z[x_1(n) * x_2(n)] = Z \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right]$$

Por definición de la transformada z,

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right] z^{-n}$$

Intercambiando el orden de las sumatorias

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n}$$

Usando la propiedad de corrimiento en el tiempo

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} X_2(z) \\ &= X_1(z)X_2(z) \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Calcular la convolución de las siguientes dos señales

$$x_1(n) = \{1, 2, 1, -1\}, \quad x_2(n) = \{1, 2, 3, 1\}$$

**Solución.** Escribimos la transformada z de cada señal:

$$X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}, \quad X_2(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}$$

multiplicamos las expresiones en el dominio z:

$$X_1(z)X_2(z) = 1 + (2+2)z^{-1} + (1+3+4)z^{-2} + (-1+1+2+6)z^{-3} + (3-6+6)z^{-4} + (1-3)z^{-5} - z^{-6}$$

$$= 1 + 4z^{-1} + 8z^{-2} + 8z^{-3} + 2z^{-4} + -2z^{-5} - z^{-6}$$

Por lo tanto

$$x_1(n) * x_2(n) = \{1, 4, 8, 8, 3, -2, -1\}$$

### 3.2.7.- Teorema del valor inicial.

Si  $x(n)$  es una señal causal, entonces

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \tag{3.22}$$

**Demostración.** Si  $x(n)$  es causal, su transformada  $z$  tiene la forma

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

cuando  $z \rightarrow \infty$  todas las potencias negativas de  $z$  tienden a cero, por lo tanto  $X(z)$  tiende a  $x(0)$ .

En la siguiente tabla se resumen todas las propiedades presentadas en esta sección.

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio $z$	ROC
Linealidad	$C_1x_1(n) + C_2x_2(n)$	$C_1X_1(z) + C_2X_2(z)$	Intersección de las ROC de $X_1(z)$ y $X_2(z)$
Corrimiento en el tiempo	$x(n-k)$	$z^{-k} X(z)$	La de $X(z)$ excepto por $z=0$ si $k>0$ y $z = \infty$ si $k<0$
Escalamiento en $z$	$a^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	Se transforma de $r_1 <  z  < r_2$ en $ a r_1 <  z  <  a r_2$
Reversión en el tiempo	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	Se transforma de $r_1 <  z  < r_2$ en $r_2 <  z  < r_1$
Diferenciación en $z$	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	No cambia
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Intersección de las ROC de $X_1(z)$ y $X_2(z)$
Teorema del valor inicial	$x(0)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	

### 3.3.- Transformadas $Z$ racionales.

Hasta este punto se han obtenido la mayoría de las transformadas  $z$  de las señales de tiempo discreto más comunes. En la siguiente tabla se resumen dichas transformadas. Como puede verse de dicha tabla, todas las transformadas mostradas son *funciones racionales de  $z^{-1}$*  (es decir, son divisiones de polinomios en  $z^{-1}$ ). En esta sección se introducen algunos conceptos importantes relacionados con estas funciones.

$x(n)$	$X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	Todo el plano $z$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
$u(-n)$	$\frac{1}{1-z}$	$ z  < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  >  a $
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  <  a $
$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z  > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$a^n \sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{a \sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2a \cos(\omega_0)z^{-1}+a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $
$a^n \cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-a \cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2a \cos(\omega_0)z^{-1}+a^2 z^{-2}}$	

### 3.3.1.- Polos y ceros.

En general, una transformada  $z$  racional tiene la forma siguiente

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (3.23)$$

Donde  $a_0, a_1, \dots, a_N, b_0, b_1, \dots, b_N$  son constantes.

En el caso en que  $a_0 \neq 0$  y  $b_0 \neq 0$  podemos evitar las potencias negativas de  $z$  factorizando en (3.23) los términos  $a_0 z^{-N}$  y  $b_0 z^{-M}$ , para obtener

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^{-M} z^M + (b_1/b_0) z^{M-1} + \dots + (b_M/b_0)}{a_0 z^{-N} z^N + (a_1/a_0) z^{N-1} + \dots + (a_N/a_0)} \quad (3.24)$$

☞ Un **cerro** de  $X(z)$  es un valor de  $z$  para el cual  $X(z) = 0$ , en forma similar un **polo** de  $X(z)$  es un valor de  $z$  en para el cual  $X(z) = \infty$ .

De acuerdo a la definición anterior, la función racional  $X(z)$  puede ser expresada de manera que aparezca en su expresión explícitamente los ceros y los polos, factorizando numerador y denominador como sigue

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = Gz^{N-M} \frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_N)} \quad (3.25)$$

Donde  $G = b_0 / a_0$ ,

$z_1, z_2, \dots, z_M$  son las raíces del numerador, es decir, los *ceros finitos* de  $X(z)$

$p_1, p_2, \dots, p_N$  son las raíces del denominador, es decir, los *polos finitos* de  $X(z)$

Por lo tanto  $X(z)$  tiene  $M$  ceros finitos,  $N$  polos finitos y  $|N - M|$  ceros (si  $N > M$ ) o polos (si  $N < M$ ) en  $z=0$ .

Los polos y ceros pueden ocurrir también cuando  $z = \infty$ , si contamos tanto polos y ceros finitos como infinitos resulta que  $X(z)$  tiene el mismo número de polos que de ceros.

### 3.3.2.- La función sistema de un DSLIT.

Como se mostró en el capítulo anterior, la salida  $y(n)$  de un sistema DSLIT a una secuencia de entrada  $x(n)$  puede ser obtenida mediante la convolución de la entrada con la respuesta  $h(n)$  al impulso unitario del sistema. Por lo tanto, en el dominio  $z$  esta relación se expresa como sigue

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (3.26)$$

Donde  $H(z)$  es la transformada  $z$  de la respuesta al impulso unitario del sistema. Como  $h(n)$  caracteriza la acción del sistema en el dominio del tiempo,  $H(z)$  caracteriza al sistema en el dominio  $z$ , por ello suele llamársele *función sistema*.

Si conocemos la señal de entrada  $x(n)$  y medimos la señal de salida  $y(n)$ , podemos obtener  $h(n)$  de la relación siguiente

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (3.27)$$

Es decir,  $H(z)$  viene siendo también la relación de la Transformada  $z$  de la salida entre la Transformada  $z$  de la entrada, por esta razón a  $H(z)$  también se le llama la *Función de Transferencia* del DSLIT.

Recordando la relación entre  $H(z)$  y  $h(n)$ :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

También podemos obtener la función sistema  $H(z)$  si el DSLIT está definido por una ecuación en diferencias de la forma

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (3.28)$$

Calculando la transformada z a cada lado de la ecuación y usando la propiedad de corrimiento obtenemos

$$Y(z) + \sum_{k=1}^N a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k}$$

Factorizando

$$Y(z) \left[ 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right] = X(z) \left[ \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right]$$

entonces

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (3.29)$$

☞ En conclusión, un DSLIT descrito por la ecuación de diferencias (3.28) tiene una función sistema de tipo *racional* dada por (3.29).

### Ejemplo

De acuerdo a lo anterior el DSLIT descrito por la siguiente ecuación de diferencias

$$y(n) + 0.5y(n-1) + y(n-2) = u(n) + u(n-1)$$

Tendrá la siguiente función sistema o función de transferencia.

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1} + z^{-2}}$$

### 3.4.- La Transformada Z Inversa.

Al proceso de obtener la señal en el tiempo discreto  $x(n)$  a partir de su expresión en transformada z  $X(z)$  se le denomina transformada z inversa, se puede obtener la siguiente relación explícita usando teoría de variable compleja:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (3.30)$$

donde C es un contorno cerrado en el plano complejo z que encierra al origen y se encuentra dentro de la ROC de  $X(z)$ .

La Transformada z inversa se puede obtener por inspección a partir de la tabla de transformadas z ya calculadas, sin embargo, en las tablas no siempre se pueden encontrar todas las posibles expresiones en z, por ello a veces se usa alguno de los tres métodos que se describirán a continuación.

### 3.4.1.- Cálculo directo de la integral de contorno (3.30).

El Teorema Integral de Cauchy y la fórmula de Cauchy (Teorema de los Residuos) los cuales son resultado de la teoría de variable compleja nos proporcionan una herramienta para calcular la integral (3.30)

#### Teorema Integral de Cauchy:

Si  $f(z)$  es una función analítica para todos los puntos sobre y dentro de un contorno cerrado simple  $C$ , entonces

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (3.31)$$

#### Fórmula integral de Cauchy:

Si  $f(z)$  es una función analítica sobre y dentro de un contorno cerrado simple  $C$  y si  $z=z_0$  es un punto en el interior del contorno, entonces

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0) \quad (3.32)$$

y también,

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} dz = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1} f(z)}{dz^{k-1}} \right|_{z=z_0} \quad (3.33)$$

A partir de los resultados anteriores se puede obtener un método práctico para evaluar la integral de contorno para una función racional de la forma:

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (3.34)$$

supongamos que  $f(z)$  tiene  $n$  raíces simples  $z_1, z_2, \dots, z_n$  dentro de  $C$ , expandiendo  $f(z)$  en fracciones parciales, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left[ \sum_{i=1}^n \frac{R_i(z)}{z-z_i} \right] dz \quad (3.35)$$

donde  $R_i$  es el residuo de  $f(z)$  en el polo  $z=z_i$ , es decir,

$$R_i(z) = (z-z_i) f(z) \quad (3.36)$$

De (3.35) y usando (3.32), obtenemos

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C f(z) dz = \sum_{i=1}^n R_i(z_i) = \sum_{\text{todos los polos } z_i} [\text{residuos de } f(z)] \quad (3.37)$$

La fórmula anterior funciona también cuando los polos son repetidos, pero en ese caso se debe usar (3.33) en lugar de (3.32)

Finalmente, la fórmula (3.37) aplicada al cálculo de la transformada inversa queda

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{z_i \text{ dentro de } C} [\text{residuos de } X(z) z^{n-1} \text{ en } z = z_i] \quad (3.38)$$

donde  $z_i$  son los polos de  $X(z)z^{n-1}$ .

### Ejemplo.

Calcular la transformada inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \text{ con } |z| > |a|$$

### Solución.

Usando la fórmula de integración obtenemos

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{1-az^{-1}} z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z-a} dz$$

donde C es una circunferencia de radio mayor que  $|a|$ . Para el cálculo consideraremos dos casos:

Para  $n \geq 0$ : En este caso el único polo es  $z=a$ , y el residuo correspondiente es:

$$R_1 = z^n \Big|_{z=a} = a^n$$

por lo tanto

$$x(n) = a^n, \quad n \geq 0$$

Para  $n < 0$ : En este caso  $\frac{z^n}{z-a}$  tiene un polo en  $z=0$  además del polo en  $z=a$ .

Para  $n=-1$ :

$$R_1(0) = \frac{1}{z-a} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{a}, \quad R_2(a) = \frac{1}{z} \Big|_{z=a} = \frac{1}{a}$$

por lo tanto

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z(z-a)} dz = 0$$

Para  $n=-2$ :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z^2(z-a)} dz = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z-a} \right) \Big|_{z=0} + \frac{1}{z^2} \Big|_{z=a} = 0$$

...etc., en general

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{1}{z-a} \right) = (-1)^n (n-1)! \frac{1}{(z-a)^n}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z^n(z-a)} dz = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{1}{z-a} \right) \Big|_{z=0} + \frac{1}{z^n} \Big|_{z=a} \\ &= (-1)^n \frac{1}{(z-a)^n} \Big|_{z=0} + \frac{1}{z^n} \Big|_{z=a} = 0 \end{aligned}$$

tomando en cuenta los dos caso anteriores obtenemos que  $x(n) = a^n u(n)$

☞ Observación: Como la ROC especificada es el exterior de un círculo, se espera que la señal  $x(n)$  sea causal, por lo tanto  $x(n)=0$  para  $n<0$  era un resultado esperado y podemos omitir el análisis del caso dos si hacemos desde el inicio esta observación.

### 3.4.2.- Cálculo por expansión en serie de potencias

La idea de este método consiste en expandir  $X(z)$  en una serie de potencias de  $z$  que converge en la ROC dada, es decir, se expresa  $X(z)$  en la forma

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} \quad (3.39)$$

entonces de la definición y de la unicidad de la transformada  $z$ , obtenemos simplemente

$$x(n) = c_n \text{ para todo } n \quad (3.40)$$

#### Ejemplo:

Determine la transformada  $z$  inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

cuando la ROC es

a)  $|z| > 1$

b)  $|z| < 0.5$

#### Solución:

a) En este caso como la ROC es el exterior de un círculo, la señal es de tipo causal, por lo que buscaremos una serie en potencias de  $z^{-1}$ . Usando el procedimiento de división de polinomios obtenemos:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \dots \\ 1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \overline{)1} \\ \underline{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \\ \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} \\ \underline{\frac{3}{2}z^{-1} - \frac{9}{4}z^{-2} + \frac{3}{4}z^{-3}} \\ \frac{7}{4}z^{-2} - \frac{3}{4}z^{-3} \\ \underline{\frac{7}{4}z^{-2} - \frac{21}{8}z^{-3} + \frac{7}{8}z^{-4}} \\ \frac{15}{8}z^{-3} - \frac{7}{8}z^{-4} \\ \dots \end{array}$$

Es decir,  $x(n) = \{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \dots\}$ , o bien,

$$x(n) = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} u(n) = \left[ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n)$$

b) En este caso la ROC es el interior de un círculo por lo tanto corresponde a una señal anticausal por ello desarrollamos en potencias positivas de  $z$ . usando nuevamente el procedimiento de división de polinomios, pero ordenando al revés:

$$\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \Bigg) \frac{2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 \dots}{1}$$

$$\frac{1 - 3z + 2z^2}{3z - 2z^2}$$

$$\frac{3z - 9z^2 + 6z^3}{7z^2 - 6z^3}$$

$$\frac{7z^2 - 21z^3 + 14z^4}{15z^3 - 14z^4}$$

$$\frac{15z^3 - 45z^4 + 30z^5}{31z^4 + 30z^5}$$

....

de donde,

$$x(n) = \{ \dots, 62, 30, 14, 6, 2, 0, 0 \}$$

↑

es decir,

$$x(n) = \left[ 2^{-n} - 2 \right] u(-n-1) = - \left[ 2 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right] u(-n-1)$$

### 3.4.3.- Cálculo por expansión en fracciones parciales

Este método consiste en realizar una expansión en fracciones parciales de la función racional  $\frac{X(z)}{z}$  para posteriormente buscar para cada fracción parcial su correspondiente expresión en el tiempo en una tabla de transformadas z de funciones básicas.

Para aplicar este método previamente se deberá escribir  $X(z)$  como una función racional *propia*, es decir

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

donde  $M < N$ .

toda fracción racional *impropia* ( $M \geq N$ ) se puede expresar siempre como la suma de un polinomio más una fracción *propia*. La transformación inversa de un polinomio es inmediata, por lo cual sólo queda el problema de transformar la parte *propia*.

**Ejemplo:** Expresar la siguiente función racional impropia como un polinomio más una fracción racional *propia*:

$$X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + \frac{11}{6}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

**Solución:**

Primero observamos que se deben eliminar del numerador las potencias  $z^{-3}$  y  $z^{-2}$ , por lo tanto usamos el procedimiento de división de polinomios arreglando los polinomios en potencias descendentes de  $z^{-1}$  y paramos el proceso cuando el orden del residuo sea  $z^{-1}$ :

$$\begin{array}{r} \frac{1}{6}z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1 \overline{) \frac{2z^{-1} + 1}{\frac{1}{3}z^{-3} + \frac{11}{6}z^{-2} + 3z^{-1} + 1}} \\ \underline{\frac{1}{3}z^{-3} + \frac{10}{6}z^{-2} + 2z^{-1}} \\ \frac{1}{6}z^{-2} + z^{-1} + 1 \\ \underline{\frac{1}{6}z^{-2} + \frac{5}{6}z^{-1} + 1} \\ \frac{1}{6}z^{-1} \end{array}$$

Por lo tanto

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

**Ejemplo (polos reales distintos):** Obtener la expansión en fracciones parciales para  $\frac{X(z)}{z}$ , para

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

**Solución:**

Multiplicando numerador y denominador por  $z^2$  se obtiene

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

factorizando el denominador obtenemos

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

Expandiendo en fracciones parciales

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{R_1}{(z-1)} + \frac{R_2}{(z-0.5)}$$

donde

$$R_1 = \left. \frac{z}{z-0.5} \right|_{z=1} = 2, \quad R_2 = \left. \frac{z}{z-1} \right|_{z=0.5} = -1$$

Finalmente

$$X(z) = \frac{2z}{(z-1)} - \frac{z}{(z-0.5)}$$

Esta expresión contiene solamente funciones básicas cuya transformada z inversa se puede obtener de la tabla de transformadas z, una vez que se especifique la ROC correspondiente.

El procedimiento mostrado en el ejemplo anterior puede ser utilizado siempre y cuando los polos no sean repetidos, inclusive aunque éstos sean complejos como se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo (polos complejos distintos):** Obtener la expansión en fracciones parciales para  $\frac{X(z)}{z}$ , si

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

**Solución:**

Multiplicando numerador y denominador por  $z^2$  se obtiene

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{z^2-z+0.5}$$

factorizando el denominador obtenemos

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

donde  $p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$ .

Expandiendo en fracciones parciales

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{R_1}{(z-p_1)} + \frac{R_2}{(z-p_2)}$$

donde

$$R_1 = \left. \frac{z+1}{z-p_2} \right|_{z=p_1} = \frac{p_1+1}{p_1-p_2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}j}{j} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}j, \quad R_2 = \left. \frac{z+1}{z-p_1} \right|_{z=p_2} = \frac{p_2+1}{p_2-p_1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}j}{-j} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}j$$

\* Obsérvese que  $R_1 = \bar{R}_2$ , lo cual es una consecuencia de que  $p_1 = \bar{p}_2$ .

Sustituyendo, se obtiene

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}j}{(z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j)} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}j}{(z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j)}$$

La cual no es una expresión muy adecuada, ya que si en la expresión original solo teníamos coeficientes reales, esperaríamos lo mismo en la expresión expandida. Esta dificultad puede ser resuelta al transformar al dominio del tiempo:

Así, si

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{R}{(z-p)} + \frac{\bar{R}}{(z-\bar{p})}$$

entonces

$$x(n) = Rp^n u(n) + \bar{R}\bar{p}^n u(n) = \left[ Rp^n + \overline{Rp^n} \right] u(n) = \operatorname{Re}\{Rp^n\} u(n)$$

si denotamos  $R, p$  en forma polar:  $R = |R|e^{j\theta}$ ,  $p = |p|e^{j\phi}$  se obtiene

$$x(n) = \operatorname{Re}\{Rp^n\} u(n) = \operatorname{Re}\{|R||p|^n e^{(\theta+jn\phi)}\} u(n)$$

o bien,

$$x(n) = |R||p|^n \cos(n\theta + \phi) u(n)$$

Para el ejemplo,  $R = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{5}{2}}e^{j\phi}$ ,  $\phi = \tan^{-1}(-3)$ ,  $p = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}$ , por lo tanto

$$x(n) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4} + \phi\right)u(n)$$

En la figura 3.3 se muestra el comportamiento en el tiempo de esta señal

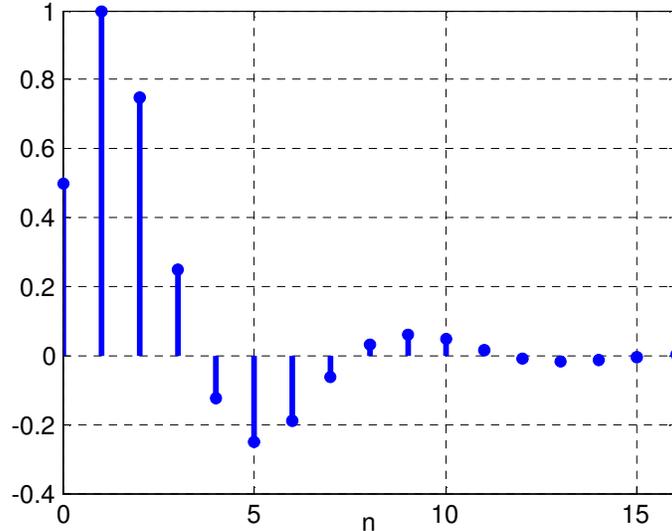


Figura 3.3. Gráfica de la señal  $x(n) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4} + \phi\right)u(n)$  del ejemplo

### Polos repetidos.

Si el denominador de  $\frac{X(z)}{z}$  contiene términos de la forma  $(z - p)^k$ , se generará una sumatoria de k fracciones parciales de la forma:

$$\frac{R_1}{z - p} + \frac{R_2}{(z - p)^2} + \dots + \frac{R_k}{(z - p)^k} \tag{3.41}$$

Donde los coeficientes de los numeradores se calculan como sigue

$$R_i = \frac{1}{(k - i)!} \left. \frac{d^{k-i}}{dz^{k-i}} \left[ \frac{(z - p)^k X(z)}{z} \right] \right|_{z=p} \tag{3.42}$$

**Ejemplo:** Obtener la expansión en fracciones parciales de  $\frac{X(z)}{z}$ , para

$$X(z) = \frac{1}{(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})^2}$$

### Solución:

Multiplicando numerador y denominador por  $z^2$  se obtiene

$$X(z) = \frac{z^3}{(z + 1)(z - 1)^2}$$

Es decir,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$$

Expandiendo en fracciones parciales

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{R_1}{(z-1)} + \frac{R_2}{(z-1)^2} + \frac{R_3}{(z+1)}$$

donde

$$R_1 = \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^2}{(z+1)} \right]_{z=1} = \left[ \frac{z^2 + 2z}{(z+1)^2} \right]_{z=1} = \frac{3}{4},$$

$$R_2 = \left[ \frac{z^2}{(z+1)} \right]_{z=1} = \frac{1}{2}, \quad R_3 = \left. \frac{z^2}{(z-1)^2} \right|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

Finalmente

$$X(z) = \frac{\frac{3}{4}z}{(z-1)} + \frac{\frac{1}{2}z}{(z-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}z}{(z+1)}$$

### 3.4.3.- Polos y respuesta en el tiempo

Si conocemos la Función Sistema  $H(z)$  del sistema podemos obtener la respuesta al impulso unitario del sistema mediante transformación inversa de  $H(z)$ .

De acuerdo a la sección anterior, si  $H(z)$  es racional con polos no repetidos se podrá escribir siempre como sigue

$$H(z) = \frac{R_1 z}{z - p_1} + \frac{R_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{R_N z}{z - p_N} \quad (3.43)$$

por lo tanto, su respuesta al impulso en el tiempo será una sumatoria de exponenciales cuyas bases están dadas por los polos.

$$h(n) = R_1 p_1^n + R_2 p_2^n + \dots + R_N p_N^n \quad (3.44)$$

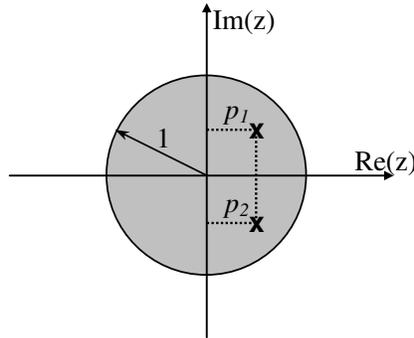
☞ Si todos los polos tienen magnitud menor que la unidad esta respuesta al impulso tenderá a cero conforme el tiempo crece y bastará con que algún polo no cumpla esta condición para que  $h(n)$  crezca indefinidamente conforme  $n$  crece, es decir,

$$|p_k| < 1 \text{ (para todo } k) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h(n) \rightarrow 0 \quad (3.45)$$

Como los polos pueden ser complejos, la condición anterior se puede expresar así:

$$\text{todos los } p_k \text{ dentro del círculo unitario} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h(n) \rightarrow 0$$

**Ejemplo:** La función sistema  $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$  como ya se vio en un ejemplo anterior, tiene los polos  $p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$  que en forma gráfica se muestran como cruces en el plano  $z$  en la figura 3.4. de donde se aprecia que se encuentran en el interior del círculo unitario, por lo tanto,  $h(n)$  debe tender a cero conforme  $n$  crece, lo cual en efecto ocurre, como se aprecia en la figura 3.3.



**Figura 3.4.** Representación en el plano  $z$  de los polos  $p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$

### 3.4.4.- Transformada $z$ unilateral

El cálculo de la Transformada  $z$  de una señal  $x(n)$  como la hemos definido requiere especificar todos los valores de  $x(n)$  desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ , esto impide su uso cuando nos interesa obtener la respuesta de un sistema con condiciones iniciales distintas de cero en el tiempo inicial, en ese caso usaremos la siguiente transformada

La transformada  $z$  unilateral de  $x(n)$  se denota como  $X^+(z)$  o también  $Z^+\{x(n)\}$  y se define como

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.46)$$

Debido esta definición, la Transformada  $z$  unilateral tiene las siguientes propiedades:

- 1)  $X^+(z)$  no contiene información acerca de  $x(n)$  para  $n$  negativo
- 2)  $X^+(z)$  y  $X(z)$  son idénticas si  $x(n)$  es causal.
- 3)  $X^+(z)$  es única solo cuando  $x(n)$  es causal
- 4) La transformada  $z$  unilateral de  $x(n)$  es idéntica a la transformada  $z$  bilateral de  $x(n)u(n)$  y como la ROC de  $x(n)u(n)$  es el exterior de un círculo, no se necesita especificar la ROC cuando tratamos solo con transformadas unilaterales.

Algunas propiedades ya vistas para la transformada  $z$  bilateral se modifican ligeramente para el caso de la transformada  $z$  unilateral como se muestra en la tabla siguiente

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio z
Retardo	$x(n-k), k>0$	$z^{-k} X^+(z) + z^{-k} \sum_{n=1}^k x(-n)z^n$
Adelanto	$x(n+k), k>0$	$z^k X^+(z) - z^k \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n}$
Teorema del valor final	$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X^+(z)$

La transformada z unilateral es una herramienta para resolver ecuaciones de diferencias con condiciones iniciales distintas de cero como se ilustra en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo:** Obtener la respuesta al escalón unitario del sistema dado por la siguiente ecuación de diferencias con la condición inicial  $y(-1)=1$ .

$$y(n) = \alpha y(n-1) + x(n)$$

**Solución:**

Calculando la transformada z unilateral a cada miembro de la ecuación se obtiene

$$Y^+(z) = \alpha z^{-1} Y^+(z) + \alpha y(-1) + X^+(z)$$

de donde

$$Y^+(z) (1 - \alpha z^{-1}) = \alpha + X^+(z)$$

Pero como  $x(n)$  es un escalón unitario:

$$Y^+(z) (1 - \alpha z^{-1}) = \alpha + \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{\alpha + 1 - \alpha z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Es decir,

$$Y^+(z) = \frac{\alpha + 1 - \alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

o bien,

$$\frac{Y^+(z)}{z} = \frac{(\alpha + 1)z - \alpha}{(z - \alpha)(z - 1)}$$

Expandiendo en fracciones parciales se obtiene

$$\frac{Y^+(z)}{z} = \frac{\frac{\alpha^2}{\alpha-1}}{(z-\alpha)} - \frac{\frac{1}{\alpha-1}}{(z-1)} = \frac{1}{1-\alpha} \left[ \frac{-\alpha^2}{(z-\alpha)} + \frac{1}{(z-1)} \right]$$

por lo tanto

$$y(n) = \frac{1}{1-\alpha} [-\alpha^2 \alpha^n + 1] u(n) = \frac{1}{1-\alpha} [1 - \alpha^{n+2}] u(n)$$

### 3.5.- Análisis de DSLITs en el dominio Z (Estabilidad)

Una de las propiedades más importantes de los sistemas es su estabilidad. La estabilidad BIBO de un sistema puede ser expresada en términos de su función sistema.

Como ya se demostró, una condición necesaria y suficiente para que un DSLIT sea BIBO-estable es que su respuesta al impulso unitario  $h(n)$  sea absolutamente sumable, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (3.47)$$

Esto quiere decir que

$$\|H(z)\|_{|z|=1} = \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \right\|_{|z|=1} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Es decir, la ROC de  $H(z)$  contiene al círculo unitario.

Por otro lado, si el sistema es *causal*, la ROC de  $H(z)$  es el exterior de algún círculo de radio  $r$ , por lo tanto  $r$  debe ser menor que 1. Como además la ROC no puede contener ningún polo de  $H(z)$  se concluye que:

☞ Un sistema DSLIT causal es BIBO estable si y solo si todos sus polos están en el interior del círculo unitario.

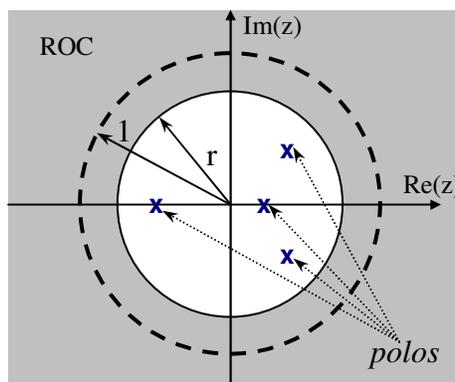


Figura 3.5. polos de un DSLIT causal BIBO-estable

De esta manera el problema de averiguar la estabilidad de un DSLIT se convierte en el problema de averiguar si todos los polos de su función sistema  $H(z)$  están o no dentro del círculo unitario. Esto se puede resolver usando métodos numéricos para búsqueda de raíces de polinomios, sin embargo éstos métodos solo se pueden aplicar cuando se conocen todos los coeficientes de  $H(z)$  lo cual no siempre es posible, en tales casos es necesario tener métodos analíticos que nos permitan hacer este análisis.

Así como en el caso continuo existen métodos analíticos como el Criterio de Routh para averiguar si las raíces de un polinomio están en el semiplano complejo derecho, para el caso discreto se han desarrollado criterios como el de Schur-Cohn o el Criterio de Jury que nos permiten averiguar si un polinomio tiene alguna raíz en el exterior del círculo unitario.

### Criterio de Schur- Cohn

Dado el polinomio de grado  $m$   $A_m(z)$  dado por

$$A_m(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m} = \sum_{k=0}^m a_k z^{-k} \quad (3.48)$$

El polinomio recíproco de  $A_m(z)$  se define como

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) = z^{-m} \sum_{k=0}^m a_k z^k = \sum_{k=0}^m a_k z^{-(m-k)} = a_0 z^{-m} + a_1 z^{-(m-1)} + \dots + a_{m-1} z^{-1} + a_m \quad (3.49)$$

Es decir los coeficientes de  $B_m(z)$  son los mismos que los de  $A_m(z)$  pero en orden inverso.

Para aplicar el Criterio de Schur-Cohn al polinomio

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N} \quad (3.50)$$

Comenzamos haciendo

$$A_N(z) = A(z) \quad (3.51)$$

y

$$K_N = a_N \quad (3.52)$$

Y luego obtenemos los polinomios de grado decreciente  $A_m(z)$  donde  $m = N, N-1, \dots, 1$ , de acuerdo a la siguiente ecuación recursiva:

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \quad (3.53)$$

Donde el coeficiente  $K_m$  es el coeficiente de la máxima potencia de  $z^{-1}$  en  $A_m(z)$ , es decir,

$$K_m = a_m \quad (3.54)$$

El criterio de Schur-Cohn establece que el polinomio  $A(z)$  tiene todos sus polos en el interior del círculo unitario si y solo si se satisface la condición

$$|K_m| < 1 \text{ para todo } m = 1, 2, \dots, N \quad (3.55)$$

**Ejemplo:** ¿Es o no estable el sistema dado por la siguiente función de transferencia?

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{7}{4} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2}}$$

**Solución.**

Como la estabilidad solo depende de los polos, es decir, del denominador, hacemos

$$A_2(z) = 1 - \frac{7}{4} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2}$$

de donde

$$K_2 = -\frac{1}{2}$$

Además

$$B_2(z) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4} z^{-1} + z^{-2}$$

sustituyendo en (3.53) obtenemos

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} \\ A_1(z) &= \frac{1 - \frac{7}{4} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} - \frac{7}{4} z^{-1} + z^{-2} \right)}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \left[ \frac{3}{4} - \frac{21}{8} z^{-1} \right] = 1 - \frac{7}{2} z^{-1} \end{aligned}$$

de donde

$$K_1 = -\frac{7}{2}$$

Como  $|K_1| = \frac{7}{2} > 1$  se concluye que el sistema es inestable. En este ejemplo se puede verificar fácilmente esta conclusión, ya que el denominador se puede factorizar como

$$\begin{aligned} A_2(z) &= 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} = z^{-2}(z^2 - \frac{7}{4}z - \frac{1}{2}) \\ &= z^{-2}(z+2)(z-\frac{1}{4}) \end{aligned}$$

de donde se observa que el polo  $p_1 = -2$  está fuera del círculo unitario.

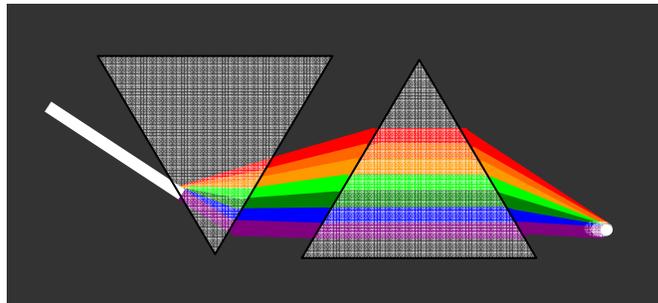
Sin embargo la utilidad del Criterio de Schur-Cohn radica en que se puede aplicar aunque el grado del denominador sea muy grande, o bien, aún si algún coeficiente es desconocido.

# Capítulo 4.

## Análisis en el Dominio de la Frecuencia

Las *Series* y la *Transformada de Fourier* proporcionan representaciones de las señales en forma de componentes sinusoidales (o exponenciales complejas) de diferentes frecuencias, debido a esto se dice que proporcionan una representación de las señales en el *dominio de la frecuencia*, es decir, describen el contenido de frecuencias de las señales.

La noción de descomposición de una señal en sus componentes de frecuencia data desde los trabajos de Isaac Newton en 1672 cuando publica su un artículo donde habla de la descomposición de la luz blanca en un *espectro* consistente en bandas de luz de diferentes colores (longitudes de onda o frecuencias). Newton colocó un segundo prisma cabeza abajo (ver figura 4.1) para mostrar que los colores (componentes) del espectro se mezclan para generar nuevamente luz blanca. Al bloquear uno de los colores newton descubrió que la luz obtenida ya no era blanca



**Figura 4.1.-** Descomposición y recomposición de luz blanca en su *espectro* de colores

Posteriormente (mediados de 1800) Gustav Kirchhoff y Robert Bunsen descubrieron que cada elemento químico al calentarse hasta la incandescencia emitía su propio y distinto color de luz, de esta manera el color de luz emitida resulta una manera de identificar al elemento químico del cual procede, es decir, el espectro luminoso proporciona una “firma” que identifica a cada elemento químico. Este principio es usado en la actualidad para identificar los elementos contenidos en cuerpos celestes muy alejados de la tierra.

El análisis del espectro de colores es una forma de análisis de componentes frecuenciales que para el caso de señales el rol del prisma es jugado por las herramientas del Análisis de Fourier: La Serie de Fourier y la Transformada de Fourier. Así como en el caso de los elementos químicos sobrecalentados, el espectro de frecuencia de una señal en el tiempo proporciona una “firma” de la señal en el sentido de que ninguna otra señal posee el mismo espectro.

## 4.1.- Análisis frecuencial de señales de tiempo continuo

El matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) desarrolló una representación para señales periódicas de tiempo continuo en la forma de una sumatoria de sinusoides o exponenciales complejas de frecuencias armónicamente relacionadas. Aunque el trabajo de Fourier estuvo motivado por la descripción del fenómeno de conducción de calor, la herramienta matemática que propuso ha encontrado actualmente aplicaciones en una gran variedad de campos de la ingeniería eléctrica y electrónica.

Una señal de tiempo continuo puede descomponerse en una sumatoria de señales exponenciales complejas de la forma  $x(t) = e^{st}$ , donde  $s$  es un número complejo. En forma similar, una señal de tiempo discreto se puede descomponer en una sumatoria de señales exponenciales discretas de la forma  $x(n) = z^n$ , donde  $z$  es un número complejo.

### 4.1.1.- Serie de Fourier.

Aunque Fourier fue de los primeros que afirmó que "cualquier" **señal periódica** podía representarse como una suma de funciones trigonométricas (en 1807) sus argumentos matemáticos eran más bien imprecisos, no fue sino hasta 1829 en que P. L. Dirichlet proporcionó las condiciones precisas bajo las cuales una señal periódica se puede representar por una serie de Fourier. Es decir, Dirichlet demostró que **no** cualquier señal periódica se puede representar por una serie de Fourier.

### 4.1.2. Forma Trigonométrica de la Serie de Fourier

Si  $x(t)$  es una **señal periódica** de periodo fundamental  $T$ , si además  $x(t)$  es integrable en el **intervalo fundamental**  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  y cumple con las siguientes tres **condiciones de Dirichlet**, se puede expresar como una serie de funciones senoidales y cosenoidales llamadas **componentes o armónicas** de  $x(t)$  como sigue

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)] \quad (4.1)$$

En donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F_0 \quad (4.2)$$

es la **frecuencia fundamental** en radianes/seg,  $F_0 = 1/T$  es la frecuencia fundamental en Hertz y los coeficientes  $a_k, b_k$  se calculan mediante el **producto interno** de  $x(t)$  con las componentes senoidales y cosenoidales respectivas, es decir,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(\omega_0 t) dt \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(\omega_0 t) dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

además

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (4.5)$$

Las tres condiciones de Dirichlet sobre  $x(t)$  son como sigue

**Condición 1.-**  $x(t)$  debe ser **absolutamente integrable** sobre el periodo fundamental, es decir

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty \quad (4.6)$$

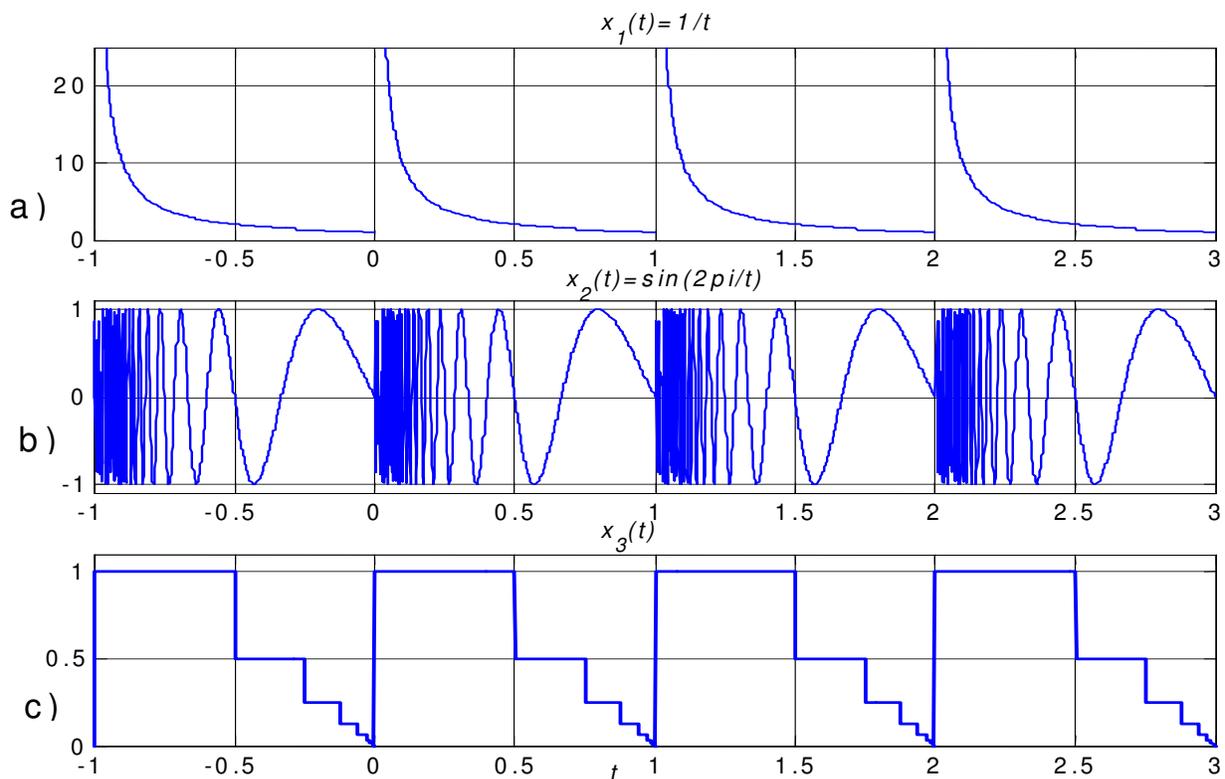
**Condición 2.-**  $x(t)$  tiene un número finito de máximos y mínimos en el intervalo fundamental.

**Condición 3.-** En cualquier intervalo finito de tiempo  $x(t)$  tiene un número finito de discontinuidades finitas.

Para ilustrar lo anterior, en la figura 4.2 se muestran tres señales que violan alguna de las condiciones, por ejemplo en 4.2(a) la señal  $x_1(t) = 1/t$  para  $0 < t < 1$  viola la condición 1.

La señal  $x_2(t) = \sin(2\pi/t)$  para  $0 < t < 1$  de la figura 4.2(b) cumple la condición 1 pero viola la condición 2.

La señal  $x_3(t)$  de la figura 4.2(c) que comienza con  $x(0)=1$  y cambia a la mitad de su valor anterior cada incremento de tiempo  $\Delta t_k = \Delta t_{k-1} / 2$ , con  $\Delta t_0 = 1/2$  viola la condición 3



**Figura 4.2** Tres señales que no cumplen las condiciones de Dirichlet

### 4.1.3. Forma Exponencial de la Serie de Fourier

Usando la fórmula de Euler

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t) \quad (4.7)$$

es posible describir la serie de Fourier en términos de funciones exponenciales complejas. De esta manera, la forma trigonométrica de la serie de Fourier (4.1) toma la siguiente forma denominada **forma exponencial**.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.8)$$

y el cálculo de los coeficientes  $c_k$  se convierte en

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4.9)$$

A la ecuación (4.8) suele llamársele la **ecuación de síntesis** ya que ésta nos dice como sintetizar la señal  $x(t)$  a partir de los coeficientes  $c_k$  mientras que a la ecuación (4.9) se le llama la **ecuación de análisis** puesto que nos permite calcular las componentes de la señal  $x(t)$  mediante sus **coeficientes espectrales**  $c_k$ .

Como  $x(t)$  normalmente es una señal que toma valores reales, por lo tanto los coeficientes  $c_k$  son pares complejos conjugados, es decir,

$$c_k = \bar{c}_{-k} \quad (4.10)$$

Denotamos ahora  $c_k$  en forma polar, entonces si  $c_k = |c_k| e^{j\theta_k}$  se tendrá que  $c_{-k} = |c_k| e^{-j\theta_k}$ , por lo tanto la ecuación (4.8) se puede escribir también en la forma siguiente

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left[ e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \theta_k)} \right] \\ x(t) &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Desarrollando ahora el coseno de la expresión anterior mediante la identidad

$$\cos(k\omega_0 t + \theta_k) = \cos(k\omega_0 t) \cos(\theta_k) - \sin(k\omega_0 t) \sin(\theta_k)$$

obtenemos

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)] \quad (4.12)$$

Donde

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_k &= 2|c_k| \cos \theta_k \\ b_k &= -2|c_k| \sin \theta_k \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \\ \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \end{array} \quad (4.13)$$

Las expresiones (4.8), (4.11) y (4.12) son tres maneras de expresar la serie de Fourier de una señal real periódica. Y las relaciones (4.13) nos permiten ir de la forma exponencial a la forma trigonométrica, de (4.13) es fácil obtener las relaciones inversas siguientes, las cuales nos permiten ir de la forma trigonométrica a la forma exponencial:

$$\left. \begin{aligned} |c_k| &= \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \\ \theta_k &= -\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

#### 4.1.4. El espectro de frecuencias

Como una señal de tiempo continuo  $x(t)$  queda determinada de manera única por sus coeficientes espectrales, la representación gráfica de estos coeficientes viene a ser la representación del contenido de frecuencias de  $x(t)$ . A esta representación se le llama el **espectro de frecuencia** de  $x(t)$  y está dado por los valores de magnitud y ángulo de  $c_k$ .

**Ejemplo:** Consideremos la señal periódica  $x(t)$  consistente en un tren de pulsos rectangulares, cuya gráfica se muestra en la Figura 4.3.

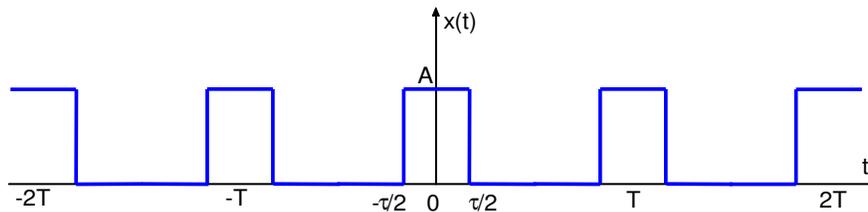


Figura 4.3 Tren de pulsos de amplitud A, ancho  $\tau$  y periodo T.

A continuación calculamos los coeficientes de Fourier. Como la señal  $x(t)$  es una señal *par* (simétrica respecto al eje vertical) consideraremos el intervalo de integración simétrico:  $[-\tau/2, \tau/2]$ .

Para  $k=0$  obtenemos  $c_0$ , el valor promedio de la señal, también llamado su *componente de directa*.

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) dt = \frac{1}{T} A \tau \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = A \frac{\tau}{T}$$

Para  $k \neq 0$  tendremos

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jk\omega_0 t} dt$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Integrando:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{A}{T} \left[ \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{T} \left[ \frac{e^{jk\omega_0 \tau/2} - e^{-jk\omega_0 \tau/2}}{jk\omega_0} \right] \\ &= \frac{A}{T} \left[ \frac{2 \sin(k\omega_0 \tau / 2)}{k\omega_0} \right] \end{aligned}$$

es decir,

$$c_k = \frac{A\tau}{T} \left[ \frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2} \right] = \frac{A\tau}{T} \operatorname{sinc}(k\omega_0\tau/2)$$

Obsérvese que los coeficientes de Fourier  $c_k$  tienen la forma de la función  $\sin(\phi)/\phi$  con  $\phi = k\omega_0\tau/2$ . En la figura 4.4 se muestra una gráfica de esta función para valores continuos de  $\phi$ .

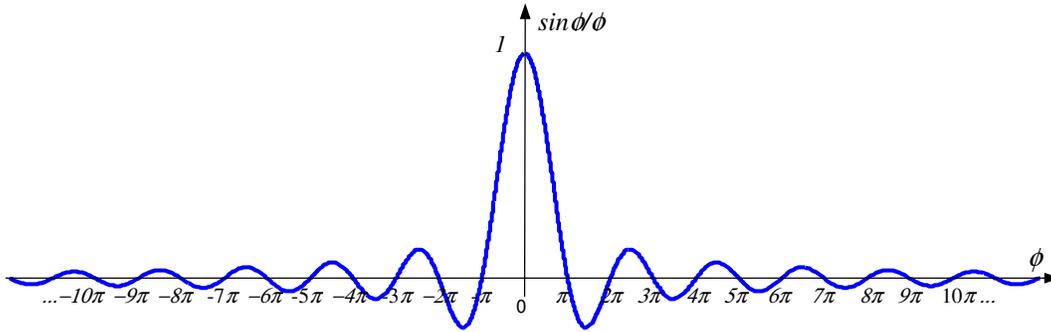


Figura 4.4. Gráfica de la función continua  $\sin(\phi)/\phi$

O sea que los coeficientes de Fourier  $c_k$  son valores escalados de la función  $\sin(\phi)/\phi$  muestreada para  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , ya que  $A, T, \tau$  y  $\omega_0$  son constantes. En la figura 4.5 se muestra la gráfica de  $c_k$  para  $A=T=1$  y diferentes valores de  $\tau$

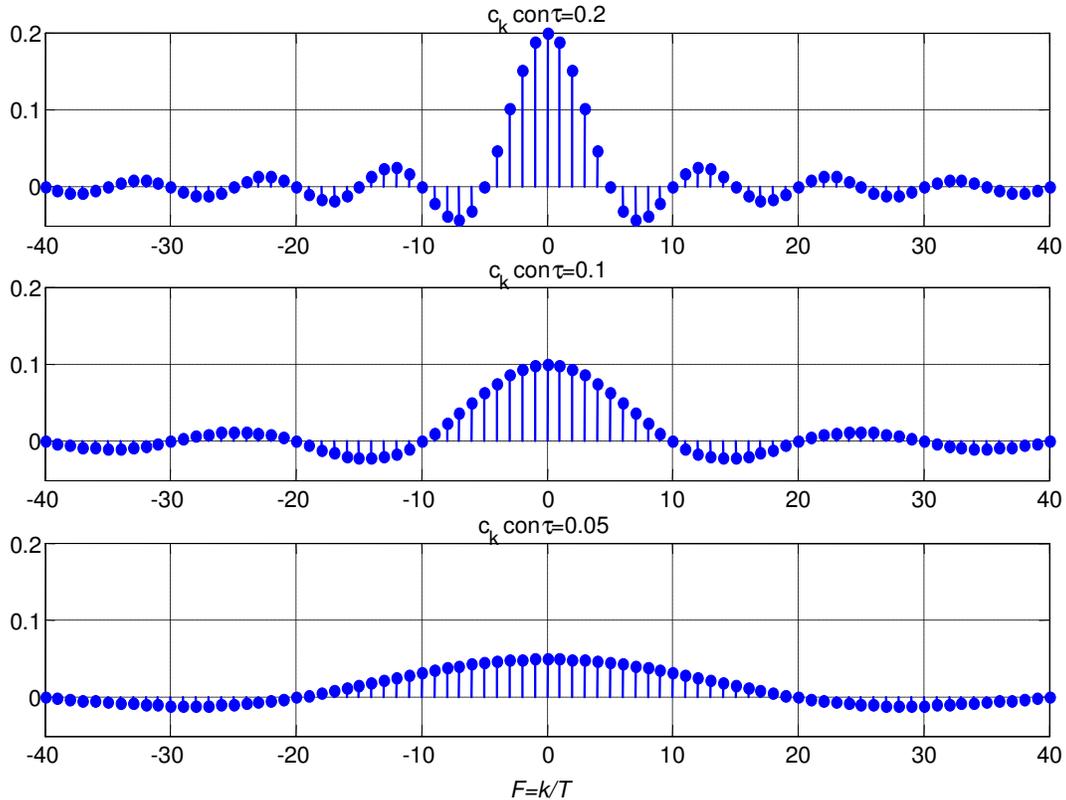
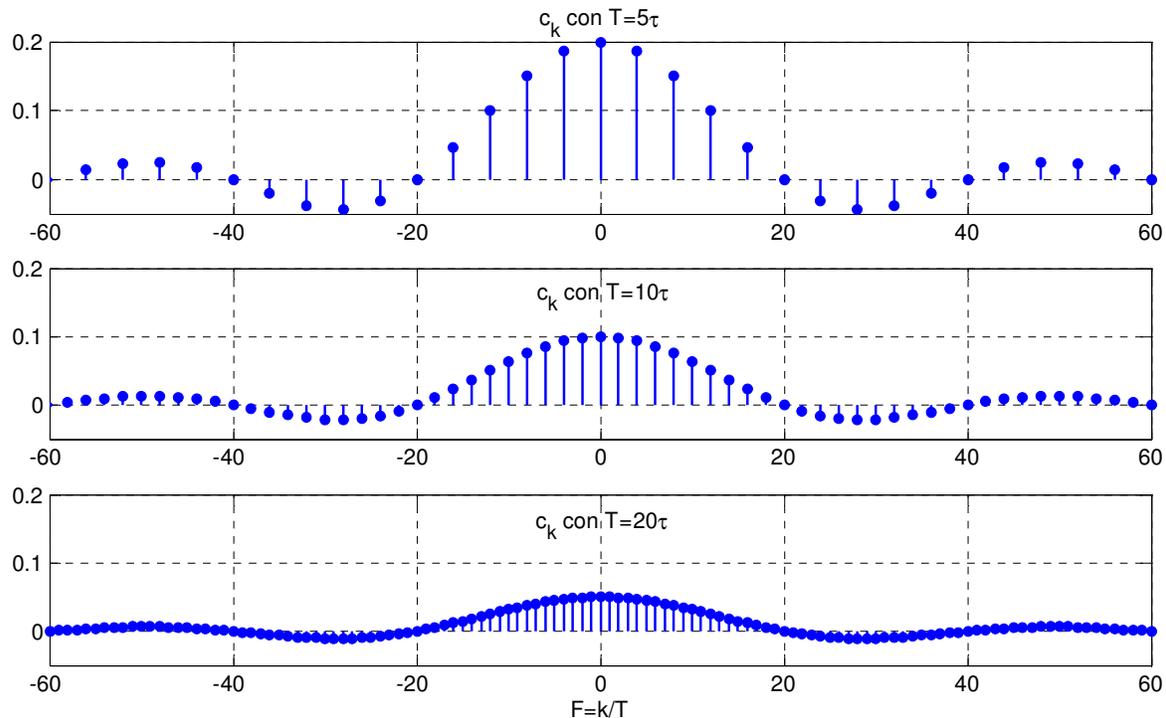


Figura 4.5. Espectro de frecuencia del tren de pulsos rectangulares para diferentes valores de  $\tau$

☞ Obsérvese que los espectros de frecuencia de señales periódicas son necesariamente **espectros discretos**.

Volviendo al ejemplo, es interesante ver qué ocurre con el espectro de frecuencia cuando se mantiene fijo  $\tau$  y se varía el periodo de la señal  $T$ . en la figura 4.6 se muestra este comportamiento para  $\tau = 0.05$ .



**Figura 4.6.** Espectro de frecuencias del tren de pulsos rectangulares al variar  $T$ .

En el ejemplo anterior y de acuerdo a la figura 4.6 se puede observar que conforme el periodo de la señal tiende a infinito, el espectro de frecuencia tiende a parecerse cada vez más a una señal continua. Esto nos lleva a la siguiente herramienta de análisis de frecuencia.

#### 4.1.5. La Transformada de Fourier de una señal continua.

El propio Fourier planteó desde el principio la posibilidad de representar una señal **no periódica** por sus componentes de frecuencia. Para aplicar el concepto de la serie de Fourier a este caso se hace la abstracción de considerar una señal no periódica como una señal periódica de periodo infinito, es decir, como una señal de frecuencia cero.

Introduciendo esta consideración en la ecuación de análisis (4.9) tenemos que

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4.15)$$

Considerando ahora la nueva variable de frecuencia  $\omega = k\omega_0$  (la cual será una variable continua si consideramos  $\omega_0$  infinitamente pequeña) y definiendo la función siguiente

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.16)$$

Es decir que los coeficientes de Fourier se pueden obtener a partir de  $X(\omega)$  mediante la relación

$$c_k = \frac{1}{T} X(k\omega_0) \quad (4.17)$$

A la función continua  $X(\omega)$  se le llama la *Transformada de Fourier* de la señal continua  $x(t)$  y nos proporciona un espectro continuo de frecuencias para  $x(t)$ .

☞ La Ecuación (4.16) se puede expresar en términos de la frecuencia  $F$  en Hertz de la siguiente manera

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad (4.18)$$

Obsérvese que la ecuación (4.16) es una nueva manera de escribir la ecuación de análisis (4.9). En forma similar, la ecuación de síntesis (4.8) se transforma en

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.19)$$

en donde se ha considerado que la cantidad infinitesimal  $\omega_0$  tiende a  $d\omega$  cuando  $T$  tiende a infinito. En forma similar en términos de la frecuencia en Hertz se tendrá,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF \quad (4.20)$$

La condición de integrabilidad absoluta para la existencia de la Serie de Fourier se convierte en

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (4.21)$$

De manera la **Transformada de Fourier** existe solamente para las funciones  $x(t)$  que cumplen con la condición (4.21)

Las ecuaciones (4.16) y (4.19) se conocen como el *par de transformadas de Fourier*, siendo la ecuación (4.16) la **Transformada de Fourier directa** y la ecuación (4.19) la **Transformada de Fourier inversa**.

☞ Es de resaltar el hecho de que la ecuación (4.19) sigue jugando el papel de **síntesis** de señales no periódicas mientras que la ecuación (4.16) sirve para el **análisis** del mismo tipo de señales.

☞ Por otro lado, también se puede ver que cuando  $T$  tiende a infinito la variable  $\omega = k\omega_0$  tiende a una variable continua y por lo tanto, el *espectro* de una señal no periódica  $x(t)$  se convierte en un espectro continuo definido por la transformada de Fourier  $X(\omega)$ .

**Ejemplo:** Consideremos la señal no periódica  $x(t)$  consistente en un pulso rectangular de ancho  $\tau$  y amplitud  $A$  como se muestra en la figura 4.7.

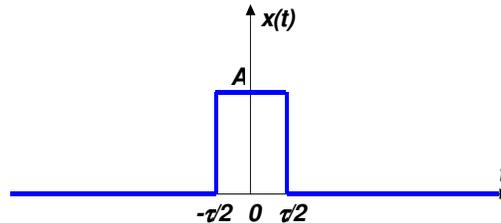


Figura 4.7 Tren de pulsos de amplitud  $A$ , ancho  $\tau$  y periodo  $T$ .

Obsérvese que esta señal es la versión no periódica del tren de pulsos del ejemplo anterior. A continuación calculamos su transformada de Fourier mediante la ecuación (4.16)

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) \end{aligned}$$

es decir, finalmente

$$X(\omega) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

En la figura 4.8 se muestra la gráfica del espectro continuo  $X(\omega)$  correspondiente

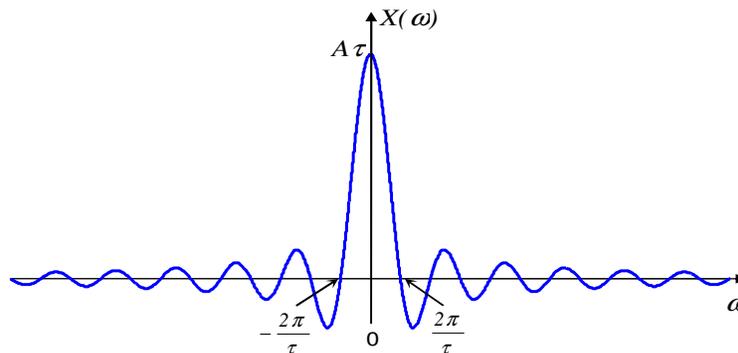


Figura 4.8. espectro continuo  $X(\omega)$  del pulso rectangular  $x(t)$ .

#### 4.1.6.- Propiedades de la Transformada de Fourier

En estas notas se supone que se ha cubierto previamente el tema de la Transformada de Laplace y que se conocen sus propiedades. Obsérvese que la definición de la Transformada de Fourier es idéntica a la Transformada bilateral de Laplace cuando  $s = j\omega$ , de manera que las propiedades de la Transformada de Laplace, tales como la linealidad, corrimiento en tiempo y frecuencia, convolución, etc. se cumplen también para la Transformada de Fourier.

## 4.2.- Análisis frecuencial de señales de tiempo discreto

En la sección anterior se han presentado las dos herramientas fundamentales para analizar el contenido de frecuencias de una señal continua  $x(t)$ :

- La Serie de Fourier cuando  $x(t)$  es periódica
- La Transformada de Fourier cuando  $x(t)$  es no periódica

Sin embargo, estas herramientas se tienen que modificar ligeramente para poder analizar el contenido de frecuencia de señales de tiempo discreto.

En forma similar al caso continuo, una motivación para representar señales discretas en términos de señales exponenciales de la forma

$$x(n) = a^n \quad (4.22)$$

donde  $a$  es una cantidad compleja es el hecho de que la salida  $y(n)$  de un DSLIT sometido a una entrada de este tipo es nuevamente la entrada exponencial multiplicada por un factor constante que depende de  $a$ , es decir, la salida es de la forma

$$y(n) = H(a)a^n \quad (4.23)$$

En efecto, la salida  $y(n)$  del sistema discreto puede determinarse a partir de la suma de convolución con la respuesta al impulso  $h(n)$  del sistema, obteniéndose

$$y(n) = h(n) * a^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)a^{n-k} = a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)a^{-k}$$

es decir,

$$y(n) = a^n H(a) \quad (4.24)$$

donde  $H(a)$  es la transformada  $z$  de  $h(n)$  valuada en  $z=a$ .

### 4.2.1.- Serie de Fourier para señales de tiempo discreto (DTFS).

Consideremos la señal discreta  $x(n)$ , periódica de periodo fundamental  $N$ . Es decir, de frecuencia fundamental  $\omega_0 = 2\pi / N$

$$x(n) = x(n + rN) \quad (4.25)$$

Para cualquier par de enteros  $n, r$ .

Buscamos expresar  $x(n)$  como una suma de funciones exponenciales periódicas de frecuencias  $\omega_k$  armónicamente relacionadas  $\omega_k = 2\pi k / N$ :

$$s_k(n) = e^{j\omega_k n} \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.26)$$

A diferencia del caso continuo, tenemos solo un número finito de armónicas, por lo tanto, *la Serie de Fourier en el caso discreto es una suma finita*:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn / N} \quad (4.27)$$

Para obtener los coeficientes  $c_k$  de la suma anterior multiplicamos ambos miembros de la ecuación por  $e^{-j2\pi in/N}$  y calculamos la suma desde  $n=0$  hasta  $n=N-1$  como sigue:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi in/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi(k-i)n/N} \quad (4.28)$$

intercambiando el orden de las sumatorias se obtiene

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi(k-i)n/N} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-i)n/N} \quad (4.29)$$

Si observamos, la última expresión es una suma geométrica de la forma  $\sum_{n=0}^{N-1} q^n$ , donde  $q = e^{j2\pi(k-i)/N}$ , usando el resultado bien conocido:

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} \frac{1-q^N}{1-q} & \text{para } q \neq 1 \\ N & \text{para } q = 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

o bien, con  $q = e^{j2\pi(k-i)/N}$ :

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-i)n/N} = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ N & k = i \end{cases} \quad (4.31)$$

por lo tanto, de (4.28) intercambiando el orden de las sumatorias se obtiene

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi(k-i)n/N} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-i)n/N} = c_i N \quad (4.32)$$

de donde se obtiene (cambiando el subíndice  $i$  por  $k$ ):

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.33)$$

La Ecuación (4.27) es llamada **La Serie de Fourier de Tiempo Discreto (DTFS)** y proporciona nuevamente una *ecuación de síntesis*, mientras que la ecuación (4.33) es una *ecuación de análisis*.

☞ Los *Coefficientes de Fourier*  $c_k$  dados por (4.33) proporcionan la amplitud y la fase de la componente de frecuencia  $\omega_k$ :

$$s_k(n) = e^{j\omega_k n} = e^{j2\pi kn/N} \quad (4.34)$$

Obsérvese que los coeficientes de Fourier  $c_k$  cuando son vistos más allá del rango  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  son a su vez una secuencia periódica, ya que de (4.33)

$$c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} e^{-j2\pi n} = c_k$$

y como  $e^{-j2\pi n} = 1$ . Se obtiene

$$c_{k+N} = c_k \quad (4.35)$$

☞ Es decir, el espectro de frecuencia de una señal discreta periódica de periodo  $N$  es a su vez una secuencia periódica de periodo  $N$ , por lo cual tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia es suficiente con  $N$  muestras para especificar completamente la información de la señal.

Tomando en cuenta que  $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ , el rango de valores de  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  cubre el intervalo fundamental  $0 \leq \omega_k < 2\pi$ , en cambio, el intervalo fundamental  $-\pi < \omega_k \leq \pi$  es cubierto por el rango  $-\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}$ , el cual tiene inconvenientes cuando  $N$  es impar.

**Ejemplo:** Calcular el espectro de frecuencia de las siguientes señales discretas:

- $x(n) = \cos(\sqrt{2}\pi n)$
- $x(n) = \cos(\pi \frac{n}{3})$
- $x(n) = \{1, 1, 0, 0\}$ , y además  $x(n) = x(n+4)$

**Solución:**

a) En este caso  $x(n) = \cos(2\pi f_0 n)$  donde  $f_0 = \sqrt{2}/2$  no es un número racional, por lo tanto  $x(t)$  no es una señal periódica y no se puede expresar por una serie de Fourier, sin embargo aún así la señal tiene un espectro consistente en una única componente de frecuencia en  $\omega_0 = \sqrt{2}\pi$ .

b) Como  $x(n) = \cos(\pi \frac{n}{3}) = \cos(2\pi \frac{n}{6})$ , en este caso  $f_0 = 1/6$  por lo tanto su espectro tendrá una componente en ese valor de frecuencia y por simetría otra componente en la frecuencia  $-f_0$ . Para calcular el valor de dichas componentes rescribimos la señal como

$$x(n) = \cos(2\pi \frac{n}{6}) = \frac{1}{2} [e^{j2\pi n/6} + e^{-j2\pi n/6}]$$

lo cual ya está en la forma de una Serie de Fourier, en donde podemos identificar los coeficientes  $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$  correspondientes a  $k=-1, 1$ , es decir, a las frecuencias  $-1/6, 1/6$ , sin embargo, si queremos solamente valores en el rango  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , usando su periodicidad observamos que

$$c_{-1} = c_{-1+N} = c_{-1+6} = c_5$$

es decir, por periodicidad la componente en  $k=-1$  se repite en  $k=5$  ( $c_5 = \frac{1}{2}$ ). En la figura 4.9 se muestra el espectro correspondiente

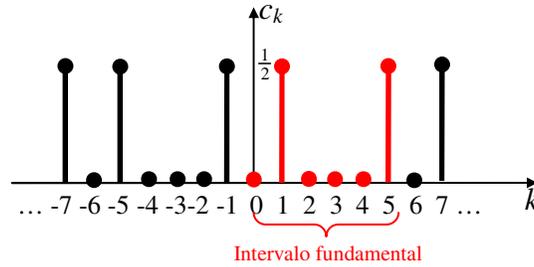


Figura 4.9. Espectro de frecuencias de la señal  $x(n) = \cos(\pi \frac{n}{3})$

c) Usando directamente la ecuación de análisis

$$c_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j2\pi kn/4} \text{ para } k = 0, 1, 2, 3$$

es decir,

$$c_k = \frac{1}{4} (1 + e^{-j\pi n/2}) \text{ para } k = 0, 1, 2, 3$$

Evaluando para  $k=0, 1, 2, 3$ , se obtiene

$$c_0 = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{1}{4}(1 - j), c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{4}(1 + j)$$

En notación polar

$$c_0 = \frac{1}{2} e^{j0}, c_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-j\pi/4}, c_2 = 0, c_3 = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{j\pi/4}$$

En la figura 4.9 se muestra el espectro de amplitud  $|c_k|$  y el espectro de fase correspondiente  $\angle c_k$

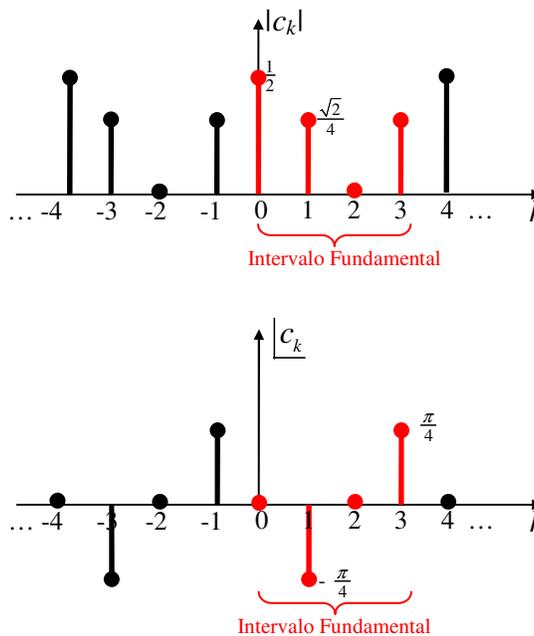
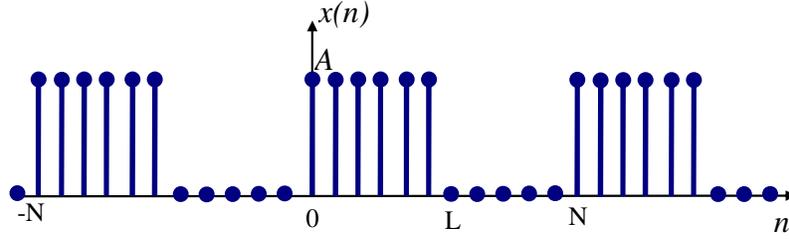


Figura 4.10. Espectro de amplitud y de fase para la señal periodica  $x(n) = \{1, 1, 0, 0\}$

**Ejemplo:** Obtener los coeficientes de Fourier para el tren de pulsos rectangular discreto mostrado en la figura 4.11.



**Figura 4.11.** Tren de pulsos de ancho  $L$  y periodo  $N$  rectangular discreto.

**Solución:** De la ecuación de análisis obtenemos

$$c_k = \frac{A}{N} \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Como se trata de una sumatoria geométrica, usando (4.30) con  $q = e^{-j2\pi k/N}$  obtenemos

$$c_k = \begin{cases} \frac{AL}{N} & \text{para } k = 0 \\ \frac{A}{N} \frac{1 - e^{-j2\pi kL/N}}{1 - e^{-j2\pi k/N}} & \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

La última expresión se puede escribir de otra manera:

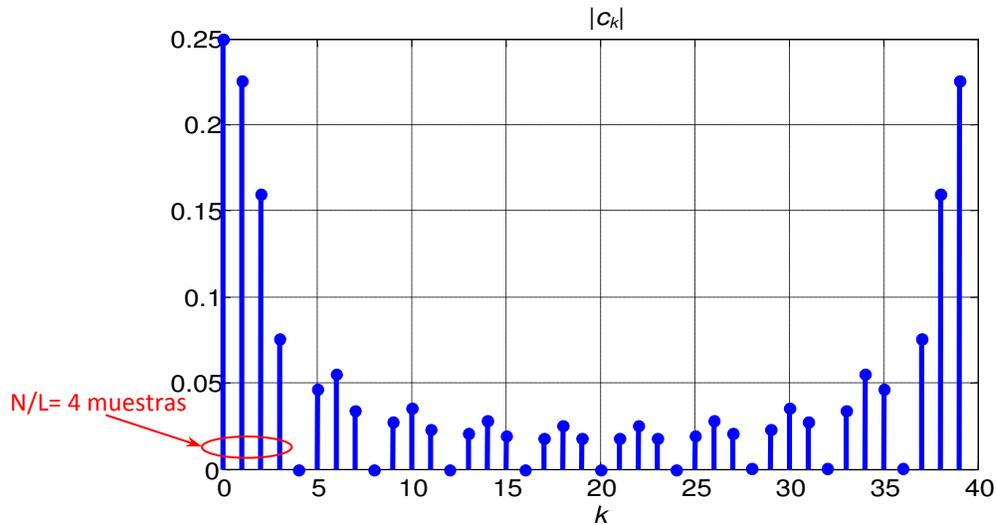
$$\frac{1 - e^{-j2\pi kL/N}}{1 - e^{-j2\pi k/N}} = \frac{e^{-j\pi kL/N}}{e^{-j\pi k/N}} \left( \frac{e^{j\pi kL/N} - e^{-j\pi kL/N}}{e^{j\pi k/N} - e^{-j\pi k/N}} \right) = e^{-j\pi k(L-1)/N} \frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)}$$

Por lo tanto, los coeficientes quedan

$$c_k = \begin{cases} \frac{AL}{N} & \text{para } k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{A}{N} e^{-j\pi k(L-1)/N} \frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)} & \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (4.36)$$

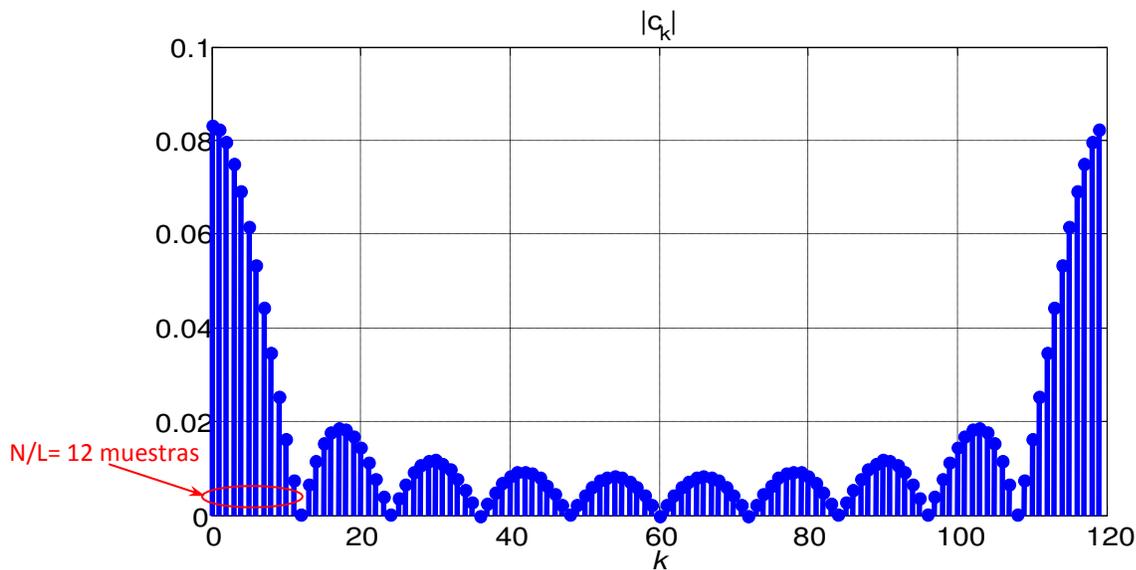
y el espectro de magnitud como el mostrado en la figura 4.12 se puede obtener de

$$|c_k| = \begin{cases} \frac{AL}{N} & \text{para } k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{A}{N} \left| \frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)} \right| & \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$



**Figura 4.12.** Espectro de amplitud para el tren de pulsos rectangular con  $L=10$ ,  $N=40$

Nuevamente podemos ver que conforme el periodo  $N$  de la señal tiende a infinito (la señal  $x(n)$  tiende a ser no-periódica) el número de muestras por intervalo se incrementa, tendiendo a formar un espectro continuo. Por ejemplo, en la figura 4.13 se muestra el espectro de amplitud correspondiente al ejemplo del tren de pulsos discreto para  $N=120$ .



**Figura 4.13.** Espectro de amplitud para el tren de pulsos rectangular con  $L=10$ ,  $N=120$

#### 4.2.2.- Transformada de Fourier de Señales de Tiempo Discreto (DTFT)

Antes de presentar la Transformada Discreta de Fourier, es conveniente estudiar primero el caso en el que calculamos la Transformada de Fourier definida para señales continuas como en (4.16) a señales de tiempo discreto no-periódicas.

Como en este caso la variable de integración toma valores discretos, la integral se transforma en una sumatoria, dicha sumatoria se denomina *Transformada de Fourier de una señal de Tiempo Discreto* (DTFT):

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (4.37)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular continua. La transformada (4.37) estará bien definida solamente si  $x(n)$  es una secuencia *absolutamente sumable*, es decir, si satisface

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

La cual es la versión discreta de solamente la primera condición de Dirichlet, las otras dos no aplican por tratarse de una señal discreta.

Como puede verse de (4.37),  $X(\omega)$  definida de esta manera es una función periódica (respecto de  $\omega$ ), además de simétrica ya que  $X(\omega) = X(-\omega)$

$$X(\omega) = X(\omega \pm 2k\pi) \text{ para } k \text{ entero} \quad (4.38)$$

☞ Es decir: una señal discreta no periódica  $x(n)$  tiene un *espectro continuo periódico* y simétrico.

Una consecuencia de la periodicidad de  $X(\omega)$  para  $x(n)$  discreta es que a diferencia del caso continuo en el cual  $\omega$  varía de  $-\infty$  a  $\infty$ , en el caso discreto  $X(\omega)$  queda completamente descrita en el intervalo  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  o bien,  $0 \leq \omega \leq 2\pi$  y por la propiedad de simetría es suficiente solo con la mitad de ese rango, es decir,  $0 \leq \omega \leq \pi$ .

**Ejemplo:** Consideremos la señal exponencial discreta

$$x(n) = a^n u(n)$$

su espectro estará dado por (4.37), es decir,

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$$

La cual es una serie geométrica de razón  $q = ae^{-j\omega}$ , por lo tanto

$$X(\omega) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

siempre y cuando  $|a| < 1$  (es su Región de Convergencia).

En la figura 4.14 se muestra la gráfica de  $|X(\omega)|$  en el intervalo  $0 \leq \omega \leq \pi$  para diferentes valores de  $a$ .

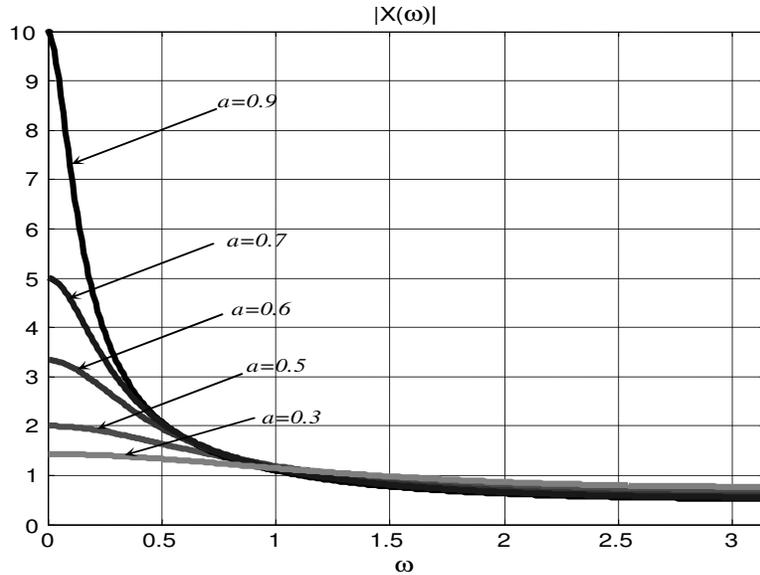


Figura 4.14. Intervalo  $0 \leq \omega \leq \pi$  del espectro de la señal exponencial discreta  $x(n) = a^n u(n)$

**Ejemplo:** Consideremos la señal discreta pulso no-periódica dada por la siguiente ecuación cuya gráfica se muestra en la figura 4.15.

$$x(n) = \begin{cases} A & n = 0, 1, 2, \dots, L-1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.39)$$

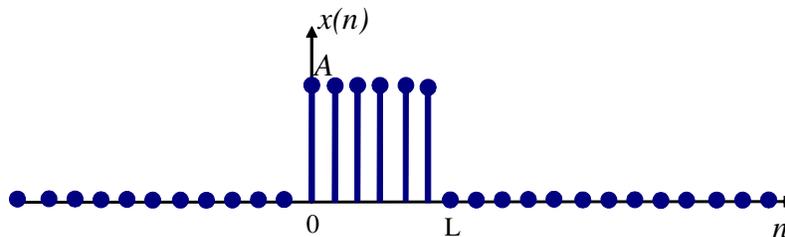


Figura 4.15. Señal pulso discreta de ancho  $L$  no-periódica.

Obtendremos su espectro mediante la DTFT como sigue

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j\omega n}$$

por lo tanto

$$X(\omega) = A \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} \text{ para } \omega \neq 0 \text{ y } X(0) = AL$$

la cual converge para todo valor real de  $\omega$ . También se puede escribir como

$$X(\omega) = Ae^{-j\omega(L-1)/2} \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (4.40)$$

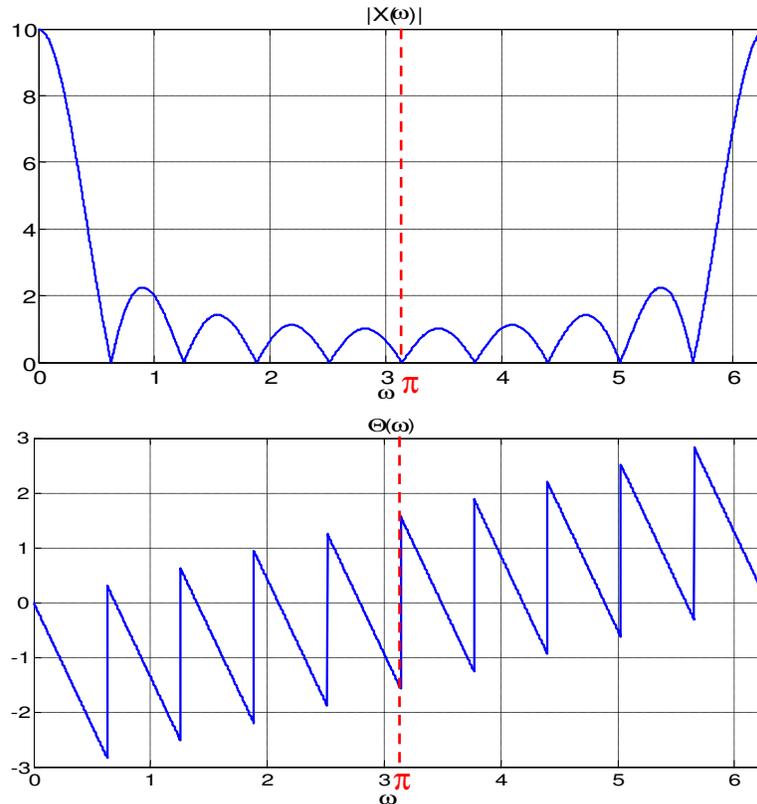
de donde, el espectro de amplitud estará dado por

$$|X(\omega)| = A \left| \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

y el correspondiente espectro de fase será

$$\Theta(\omega) = \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} - \omega(L-1)/2$$

La gráfica del espectro de amplitud se muestra en la figura 4.16. para el caso  $A=1$ ,  $L=10$ .



**Figura 4.16.** Espectros de magnitud y fase correspondientes al pulso discreto no periódico para  $L=10$

### 4.2.3.- Relación entre la DTFT y la DTFT

Comparemos ahora el resultado obtenido en este ejemplo para la Transformada de Fourier del pulso discreto no periódico con el ejemplo anterior para el pulso discreto periódico, para ello evaluemos  $X(\omega)$  dada por (4.40) en  $N$  valores discretos igualmente espaciados (frecuencias armónicamente relacionadas) :

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.41)$$

con lo que obtenemos

$$X(\omega_k) = A e^{-j\pi k(L-1)/N} \frac{\sin(\pi k L / N)}{\sin(\pi k / N)} \quad (4.42)$$

Es decir, si comparamos con (4.36) podemos observar que se cumple la siguiente relación

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = Nc_k \quad (4.43)$$

☞ Es decir, La transformada de Fourier del pulso discreto no periódico de ancho  $L$  evaluada en las  $N$  frecuencias armónicamente relacionadas:  $\omega = 2\pi k / N$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  es idéntica al múltiplo del coeficiente de Fourier:  $Nc_k$  correspondiente al pulso discreto periódico de ancho  $L$  y periodo  $N$ .

☞ El resultado anterior no solamente es válido para el ejemplo del pulso rectangular, sino para cualquier señal discreta periódica y su correspondiente versión no periódica.

#### 4.2.4. Relación entre la DTFT y la Transformada Z

De la definición de la transformada  $z$  de una señal discreta

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (4.44)$$

con ROC  $r_1 < |z| < r_2$ .

Si expresamos la variable compleja  $z$  en forma polar

$$z = re^{j\omega} \quad (4.45)$$

de (4.44) obtenemos para  $r_1 < r < r_2$

$$X(z)\Big|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n} \quad (4.46)$$

si comparamos (4.46) con la definición de la Transformada de Fourier de una señal discreta (4.37), la relación anterior significa que la Transformada  $z$  de la señal discreta  $x(n)$  puede verse como la Transformada de Fourier de la señal discreta  $x(n)r^{-n}$ .

Por otro lado, si  $r=1$  (el círculo unitario) está contenido en la ROC de  $X(Z)$  entonces

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(\omega) \quad (4.47)$$

☞ Es decir, la Transformada de Fourier de la señal discreta  $x(n)$  es su Transformada  $z$  evaluada sobre el círculo unitario. Por lo tanto, si la ROC de  $X(z)$  no contiene el círculo unitario, su transformada de Fourier no existirá.

#### 4.4. Clasificación de señales en el dominio de la frecuencia. El concepto de ancho de Banda.

Así como como las señales se clasifican de acuerdo a sus características en el dominio del tiempo, también se pueden clasificar de acuerdo a sus características de frecuencia. Así, de acuerdo al espectro de amplitud, de densidad de potencia o de energía una señal puede ser clasificada como sigue:

- **Señal de baja frecuencia.** Si su espectro se concentra cerca de frecuencia cero.
- **Señal de alta frecuencia.** Si su espectro se concentra en frecuencias altas (cerca de  $\pi$  rad/muestra para el caso discreto).
- **Señal de frecuencia media.** Si su espectro se concentra algún punto intermedio entre frecuencia cero y frecuencias altas.

La clasificación cualitativa anterior es un poco ambigua burda y normalmente se debe completar con alguna especificación cuantitativa, como el **Ancho de banda de la señal**, el cual expresa el rango de frecuencias en el cual se encuentra concentrado un alto porcentaje del espectro de la señal. Por ejemplo, si una señal continua tiene el 95% de su espectro concentrado en el rango  $F_1 \leq F \leq F_2$ , entonces se dice que el ancho de banda del 95% de la señal es  $F_2 - F_1$ .

Una señal se dice de **banda estrecha** si su ancho de banda  $F_2 - F_1$  es mucho menor que su frecuencia media  $(F_2 + F_1) / 2$ , de lo contrario se dice que es una señal de **banda ancha**.

Una señal continua se dice de **banda limitada** si su espectro es cero para frecuencias  $F$  fuera del rango  $|F| \leq B$ . Una señal discreta  $x(n)$  se dice de **banda limitada periódicamente** si  $|X(\omega)| = 0$  para  $\omega_0 < |\omega| < \pi$ . En la figura 4.17 se ilustran los cuatro casos de señales de banda limitada.

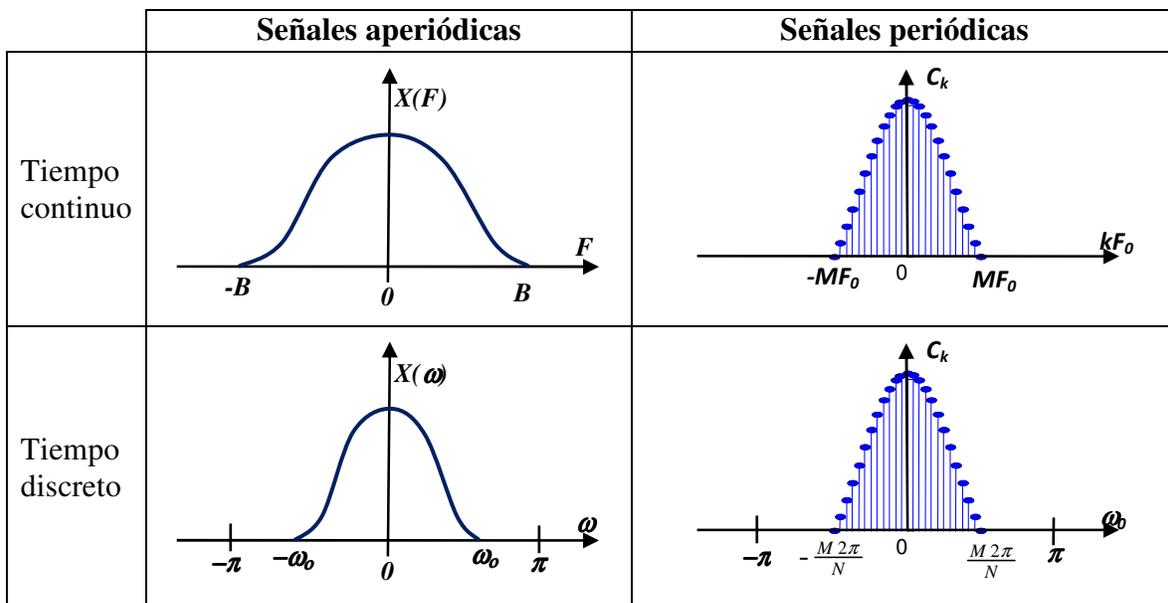


Figura 4.17. Ejemplos de espectros de señales de banda limitada.

Para ilustrar la dualidad entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia también se pueden definir señales de **tiempo limitado**. Una señal  $x(t)$  se dice que es de tiempo limitado si  $x(t) = 0$  para  $|t| > \tau$  y se dice que la señal periódica  $x_p(t)$  de periodo  $T$  se dice de **tiempo limitado periódicamente** si  $x_p(t) = 0$  para  $\tau < |t| < T/2$ , en forma similar para el caso periódico.

☞ Un resultado interesante es el hecho de que ninguna señal puede ser simultáneamente de tiempo limitado y de banda limitada. En general, una señal de duración corta tiene un espectro cuyo ancho es inversamente proporcional a la duración de la señal en el dominio del tiempo.

### 4.3.- Resumen de Series y Transformada de Fourier

En la siguiente tabla se presenta un resumen general sobre Series y Transformadas de Fourier en tiempo Continuo y en tiempo discreto.

#### Resumen de Series y Transformadas de Fourier

	Tiempo Continuo		Tiempo Discreto	
	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
<b>Serie De Fourier</b>	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ tiempo continuo, periódica	$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ frecuencia discreta, no periódica	$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$ tiempo discreto, periódica	$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$ frecuencia discreta, periódica
<b>Transf. De Fourier</b>	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ tiempo continuo, no periódica	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ frecuencia continua, no periódica	$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$ tiempo discreto, no periódica	$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ frecuencia continua, periódica

#### 4.4.1. Rangos de frecuencia de algunas señales en la naturaleza.

Si deseamos hacer procesamiento de señales del mundo real, es necesario conocer aproximadamente el rango de frecuencias contenidas en las señales que vamos a procesar para poder establecer las limitantes o alcances de los algoritmos de procesamiento y la interpretación de los resultados. En la siguiente tabla se muestran algunos rangos aproximados en el dominio de la frecuencia de señales existentes en la naturaleza.

Tipo de señal	Rango de frecuencia (Hz)
<b>Señales Biológicas</b>	
Electroretinograma	0 - 20
Electronistagmograma (movimientos involuntarios del ojo)	0 - 20
Pneumograma (actividad respiratoria)	0 - 40
Electrocardiograma (ECG)	0 - 100
Electroencefalograma (EEG)	0 - 100
Electromiograma (actividad muscular)	10 - 100
Esfigmomanograma (presión arterial)	0 - 200
Voz	100 - 4000
<b>Señales Sísmicas</b>	
Ruido producido por viento	100 - 1000
Señales de exploración sísmica	10 - 100
Sismos y explosiones nucleares	0.01 - 10
Ruido sísmico	0.1 - 1
<b>Señales Electromagnéticas</b>	
Radiodifusión	$3 \times 10^4 - 3 \times 10^6$
Radio de onda corta	$3 \times 10^6 - 3 \times 10^{10}$
Radar , comunicaciones por satélite y microondas	$3 \times 10^8 - 3 \times 10^{10}$
Infrarrojo	$3 \times 10^{11} - 3 \times 10^{14}$
Luz visible	$3.7 \times 10^{14} - 7.7 \times 10^{14}$
Ultravioleta	$3 \times 10^{15} - 3 \times 10^{16}$
Rayos gamma y rayos X	$3 \times 10^{17} - 3 \times 10^{18}$

#### 4.5.- Respuesta a la frecuencia de sistemas DSLIT

La motivación para desarrollar una representación de señales de tiempo continuo en términos de una serie de Fourier, es decir, en términos de señales exponenciales complejas de la forma  $x(t) = e^{at}$  es el hecho de que la respuesta de un sistema continuo a una señal exponencial compleja de este tipo es la misma señal exponencial compleja modificada sólo en amplitud, es decir, si la entrada al sistema es  $x(t) = e^{at}$ , la salida será

$$y(t) = H(a)e^{at} \quad (4.48)$$

En efecto, como ya se dijo, la respuesta a una entrada  $x(t) = e^{at}$ , bajo condiciones iniciales cero se calcula mediante la convolución con la respuesta del sistema al impulso  $h(t)$ , es decir,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{a(t-\tau)} d\tau = e^{at} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-a\tau} d\tau \quad (4.49)$$

es decir,

$$y(t) = H(a)e^{at} \quad (4.50)$$

donde

$$H(a) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-a\tau} d\tau \quad (4.51)$$

no es otra cosa que la transformada de Laplace de la respuesta del sistema al impulso valuada en  $s=a$ , es decir,  $H(a)$  es una constante compleja dada por la integral anterior y que depende de la respuesta al impulso  $h(t)$  del sistema.

De esta manera, resulta muy útil poder representar una señal cualesquiera en términos de señales exponenciales complejas.

- La respuesta de frecuencia de un sistema es la caracterización de la respuesta de estado estable de un DSLIT a cualquier combinación lineal de sinusoides o exponenciales complejas. La obtención de la respuesta de frecuencia de un DSLIT permite por lo tanto obtener la respuesta de estado estable ante cualquier señal periódica expresándola en su serie de Fourier, o inclusive ante señales no periódicas expresándolas mediante su Transformada de Fourier.

#### 4.5.1.- Respuesta a exponenciales complejas y a señales senoidales: La Función de Respuesta de Frecuencia.

Como ya se explicó, la respuesta de un DSLIT a cualquier entrada  $x(n)$  bajo condiciones iniciales cero está dada por la sumatoria de convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (4.52)$$

Donde  $h(n)$  es la respuesta del sistema al impulso unitario.

A continuación excitamos el sistema con la siguiente señal de entrada exponencial

$$x(n) = Ae^{j\omega n} \text{ con } -\infty < n < \infty \quad (4.53)$$

Donde  $A$  es la amplitud y  $\omega$  es un valor arbitrario de frecuencia en el intervalo  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Sustituyendo en (4.54), obtenemos

$$y(n) = A \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \right] e^{j\omega n} \quad (4.54)$$

Obsérvese que el término entre corchetes no es más que la Transformada de Fourier de  $h(k)$ . Es decir, la respuesta del sistema se puede escribir como

$$y(n) = AH(\omega)e^{j\omega n} \quad (4.55)$$

O bien,

$$y(n) = H(\omega)x(n) \quad (4.56)$$

donde

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \quad (4.57)$$

En general, como  $H(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $h(k)$ , entonces  $H(\omega)$  es una función periódica de periodo  $2\pi$  y es una función de variable compleja, por ello siempre se puede escribir en forma polar como

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\Theta(\omega)} \quad (4.58)$$

Donde  $|H(\omega)|$  es la magnitud de  $H(\omega)$  y  $\Theta(\omega) = \angle H(\omega)$ .

☞ Es decir, la respuesta del sistema ante una entrada exponencial es también exponencial de la misma frecuencia pero alterada por el factor  $H(\omega)$  (el cual altera la amplitud en un factor  $|H(\omega)|$  y la fase en un ángulo  $\angle H(\omega)$ ).

**Ejemplo.** Determinar la respuesta del sistema cuya respuesta al impulso es

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Cuando la entrada es la secuencia exponencial

$$x(n) = A e^{j\pi n/2} \text{ con } -\infty < n < \infty$$

**Solución.** Recordando que

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

Evaluando en  $\omega = \pi/2$  se obtiene

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} j} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26.6^\circ} =$$

Por lo tanto, la respuesta del sistema es

$$y(n) = \frac{2}{\sqrt{5}} A e^{j(\pi n/2 - 26.6^\circ)} \text{ con } -\infty < n < \infty$$

**Observación:** Como  $H(\omega)$  en general es una función de la frecuencia, la amplitud y fase de la respuesta variarán con la frecuencia de la señal de entrada, por ello es muy útil considerar las gráficas de  $|H(\omega)|$  y de  $\angle H(\omega)$  con respecto a  $\omega$  para ilustrar el comportamiento del sistema ante entradas de diferente frecuencia.

**Ejemplo.** Graficar la respuesta de frecuencia del sistema media móvil de tres puntos dado por:

$$y(n) = \frac{1}{3} [x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$$

**Solución.** La respuesta al impulso para este sistema está dada por

$$h(n) = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

↑

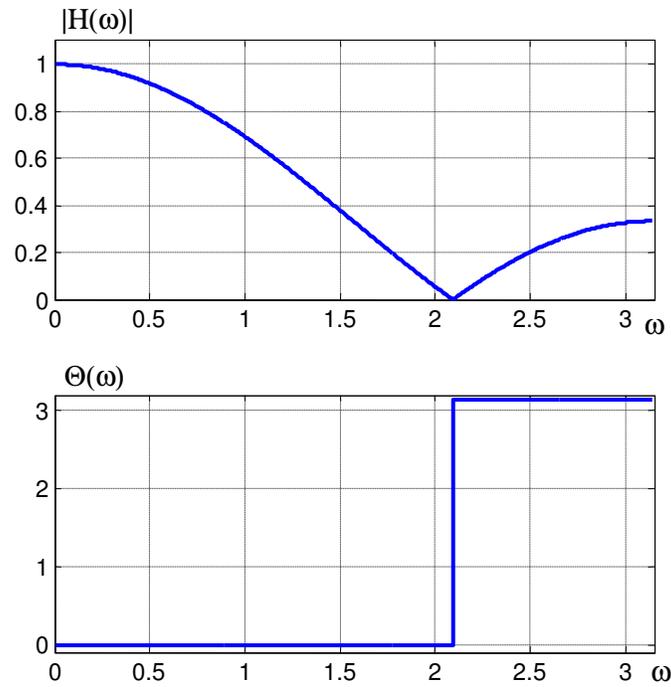
De donde

$$H(\omega) = \frac{1}{3} (e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos \omega)$$

Por lo tanto

$$|H(\omega)| = \frac{1}{3}|1 + 2\cos \omega|, \quad \angle H(\omega) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{3} \\ \pi & \frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

La gráfica correspondiente se muestra en la figura 4.18



**Figura 4.18.-** Respuesta a la frecuencia del sistema promedio móvil de tres puntos.

A continuación es sencillo obtener la respuesta a una señal sinusoidal, ya que esta se puede expresar por una suma o resta de dos exponenciales, en efecto, consideremos las siguientes señales exponenciales:

$$x_1(n) = Ae^{j\omega n}, \quad x_2(n) = Ae^{-j\omega n}$$

Entonces

$$A \cos(\omega n) = \frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n)]$$

y

$$A \sin(\omega n) = \frac{1}{2j}[x_1(n) - x_2(n)]$$

La respuesta del sistema correspondiente a la señal  $x_1(n) = Ae^{j\omega n}$  de acuerdo a (4.56) es  $y_1(n) = H(\omega)x_1(n)$  y en forma similar, la respuesta a del sistema a la señal  $x_2(n) = Ae^{-j\omega n}$  será  $y_2(n) = H(\omega)x_2(n)$ .

De acuerdo a lo anterior, a respuesta del sistema a una señal cosenoidal será

$$y(n) = \frac{1}{2}[y_1(n) + y_2(n)] = \frac{1}{2}H(\omega)[x_1(n) + x_2(n)] = AH(\omega)\cos(\omega n)$$

O bien,

$$y(n) = A|H(\omega)|\cos[\omega n + \Theta(\omega)] \quad (4.59)$$

En forma similar, si la entrada es una señal senoidal, la respuesta del sistema será

$$y(n) = A |H(\omega)| \sin[\omega n + \Theta(\omega)] \quad (4.60)$$

☞ Es decir, el efecto del sistema en estado estable consiste solamente en la modificación de la amplitud y la fase de la señal sinusoidal de entrada y la magnitud de esta modificación depende de la frecuencia.

☞ De acuerdo a lo anterior se concluye que  $|H(\omega)|$  y  $\Theta(\omega)$  caracterizan completamente la respuesta de frecuencia del sistema en estado estable.

**Ejemplo.** Consideremos el DSLIT descrito por la siguiente ecuación de diferencias:

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n) \quad \text{con } 0 < a < 1$$

- Determine la respuesta de frecuencia (magnitud y fase de  $H(\omega)$ ).
- Escoja el parámetro  $b$  de manera que el valor máximo de  $|H(\omega)|$  sea unitario, grafique  $|H(\omega)|$  y  $\angle H(\omega)$  para  $a=0.9$ .
- Determine la respuesta del sistema en estado estable ante la entrada  $x(n) = 5 + 12 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 20 \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

**Solución.** La respuesta al impulso del sistema se puede obtener usando cualesquiera de los métodos vistos en los dos capítulos anteriores y es

$$h(n) = ba^n u(n)$$

Como  $|a| < 1$  el sistema es BIBO-estable y por lo tanto  $H(\omega)$  existe.

**Solución al inciso (a):** La respuesta de frecuencia está dada por

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \frac{b}{1 - ae^{-j\omega}}$$

y como

$$1 - ae^{-j\omega} = 1 - a \cos \omega + ja \sin \omega$$

y por lo tanto

$$|1 - ae^{-j\omega}| = \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}$$

de donde se tiene que

$$|H(\omega)| = \frac{|b|}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}$$

y

$$\angle H(\omega) = \angle b - \tan^{-1} \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}$$

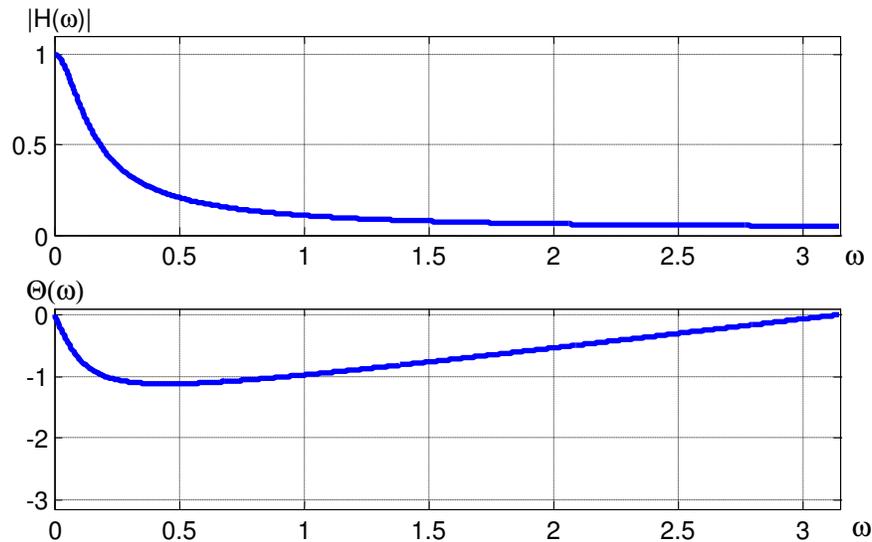
**Solución al inciso (b):** El valor máximo de  $|H(\omega)|$  ocurre cuando su denominador es mínimo, esto ocurre en  $\omega=0$ , por lo tanto hacemos

$$|H(0)| = \frac{|b|}{1-a} = 1$$

De donde se obtiene que  $b = \pm(1-a)$ . Elegimos  $b = 1-a$ , con lo cual obtenemos

$$|H(\omega)| = \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}} \quad \text{y} \quad \angle H(\omega) = -\tan^{-1} \frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$$

En la figura 4.19 se muestra la gráfica correspondiente cuando  $a = 0.9$ .



**Figura 4.19.** Respuesta de frecuencia del sistema de primer orden con  $a = 0.9$ .

**Solución al inciso (c):** La señal de entrada contiene componentes en las frecuencias  $\omega = 0$ ,  $\omega = \pi/2$  y  $\omega = \pi$ . Evaluamos en estos tres puntos magnitud y fase de  $H(\omega)$  y obtenemos

$$\begin{aligned} |H(0)| &= 1, & \angle H(0) &= 0 \\ |H(\pi/2)| &= \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}} = 0.074, & \angle H(\pi/2) &= -\tan^{-1} a = -42^\circ \\ |H(\pi)| &= \frac{1-a}{1+a} = 0.053, & \angle H(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la respuesta del sistema en estado estable es:

$$\begin{aligned} x(n) &= 5 + 12(0.074) \sin\left(\frac{\pi}{2}n - 42^\circ\right) - 20(0.053) \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 5 + 0.888 \sin\left(\frac{\pi}{2}n - 42^\circ\right) - 1.06 \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

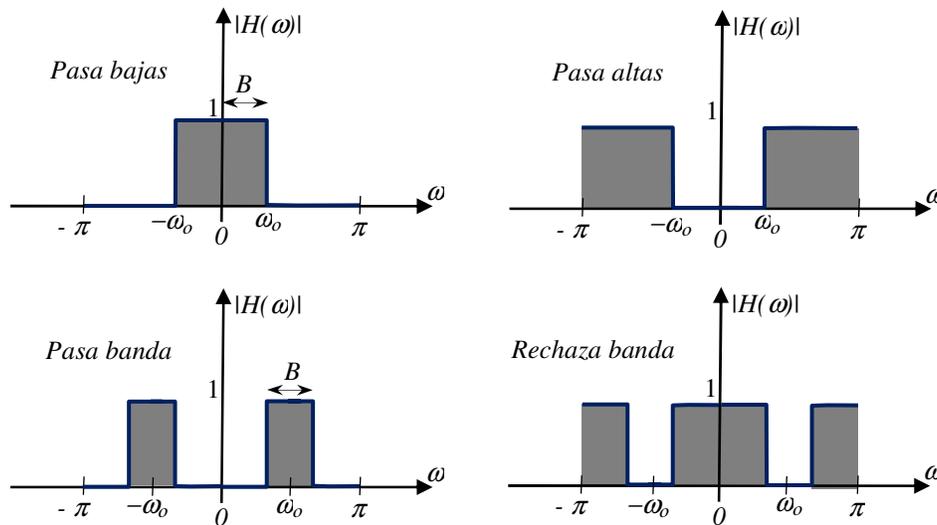
#### 4.6.- Análisis de sistemas DSLIT como filtros digitales de frecuencia selectiva

Todo DSLIT puede ser visto de acuerdo a su respuesta de frecuencia como un dispositivo que modifica dos características de la señal de entrada en función de la frecuencia de ésta: su amplitud y/o su fase. Es decir, un DSLIT produce amplificación, atenuación y/o defasamiento de

la señales que entran dependiendo de su frecuencia, es por ello que pueden ser considerados como **filtros** dependientes de la frecuencia.

**4.6.1.- Características de frecuencia de filtros ideales.**

Los filtros se clasifican de acuerdo a las características de su respuesta de frecuencia como: Pasa bajas, Pasa altas, Pasa banda y Rechaza banda. En la figura 4.20 se muestra la respuesta ideal de ganancia respecto a la frecuencia para estos cuatro tipos de filtros en el caso discreto.



**Figura 4.20.-** Respuestas ideales de los cuatro tipos de filtros.

Otra característica de un filtro es la **fase** que agrega a la señal, la cual en el caso ideal se considera lineal respecto a la frecuencia en el rango de frecuencias de interés, es decir, se considera que el filtro tiene la siguiente respuesta de frecuencia:

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0} & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{4.61}$$

Donde  $n_0$  es constante. Evidentemente en este caso  $|H(\omega)| = 1$  para  $\omega_1 < \omega < \omega_2$

Obsérvese que (usando transformada inversa de Fourier) la respuesta de frecuencia anterior denota un sistema que simplemente introduce un corrimiento en el tiempo de valor  $n_0$ , es decir, la respuesta del sistema a una entrada arbitraria  $X(\omega)$  está dada por

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= H(\omega)X(\omega) \\ &= X(\omega)e^{-j\omega n_0} \text{ para } \omega_1 < \omega < \omega_2 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Pasando al dominio del tiempo se obtiene

$$y(n) = x(n - n_0) \tag{4.63}$$

☞ En resumen, un filtro ideal tiene tanto una magnitud constante (y unitaria) como una variación de fase lineal respecto a la frecuencia en la banda de paso.

Un quinto tipo de filtro es un **filtro pasa todo**, el cual no es propiamente un filtro, este filtro presenta una ganancia unitaria en todas las frecuencias posibles y suele utilizarse por su característica de fase para introducir un defasamiento sin amplificar ni atenuar una señal.

☞ Los filtros ideales **no** son físicamente realizables, pero sirven como referencia ideal para los filtros que sí se pueden construir.

#### 4.6.2.- Método gráfico de diseño de filtros.

A continuación se describe un método para el diseño de filtros simples basado en la colocación de polos y ceros de la función de transferencia del filtro en el plano Z.

El principio en el que se basa el método es el siguiente:

- ✚ Colocar los **polos** cerca de los puntos del círculo unitario correspondientes a las frecuencias que se desea enfatizar.
- ✚ Colocar los **ceros** cerca de los puntos del círculo unitario correspondientes a las frecuencias que se desea atenuar.

Además de lo anterior se deben imponer las siguientes restricciones de diseño:

- Todos los polos deberán ser colocados adentro del círculo unitario para que el filtro sea **estable**. En cambio los ceros pueden ser colocados en cualquier lugar en el plano Z.
- Todos los polos y ceros complejos deberán elegirse en pares conjugados para lograr que el filtro tenga **coeficientes reales**.

#### 4.6.3.- Filtros pasa bajas, pasa altas y pasa banda.

Para el diseño de filtros pasa bajas los polos deberán ser colocados cerca del círculo unitario cerca de  $z = e^{j\omega} = 1$ , es decir cerca de  $\omega = 0$  y los ceros deberán colocarse cerca de  $z = e^{j\omega} = -1$ , es decir, cerca de  $\omega = \pi$ . En el caso de filtros pasa altas se sigue simplemente lo opuesto. En la figura 4.21 se muestran algunos ejemplos de diagramas de polos y ceros de filtros pasa bajas y pasa altas.

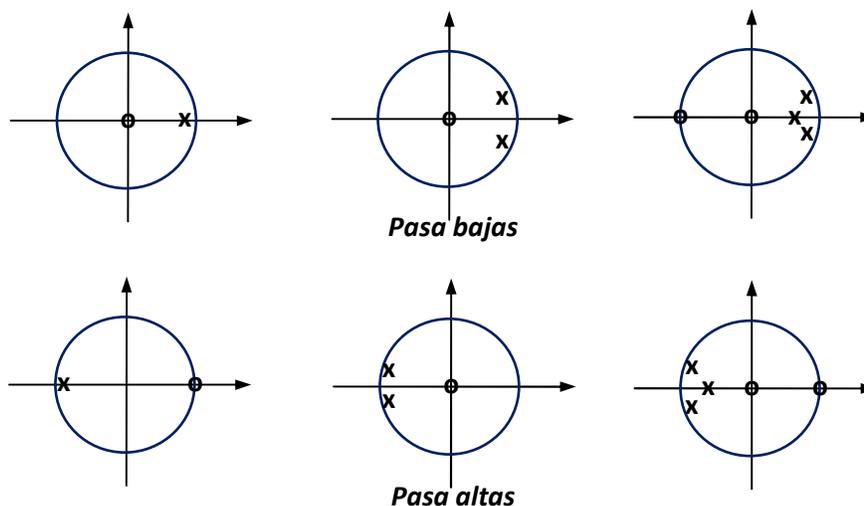


Figura 4.21.- Ejemplos de tres diagramas de polos y ceros de filtros pasa bajas y pasa altas.

**Ejemplo.** La figura 4.17 ilustra que el sistema

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n) \quad \text{con } a = 0.9, b = 0.1$$

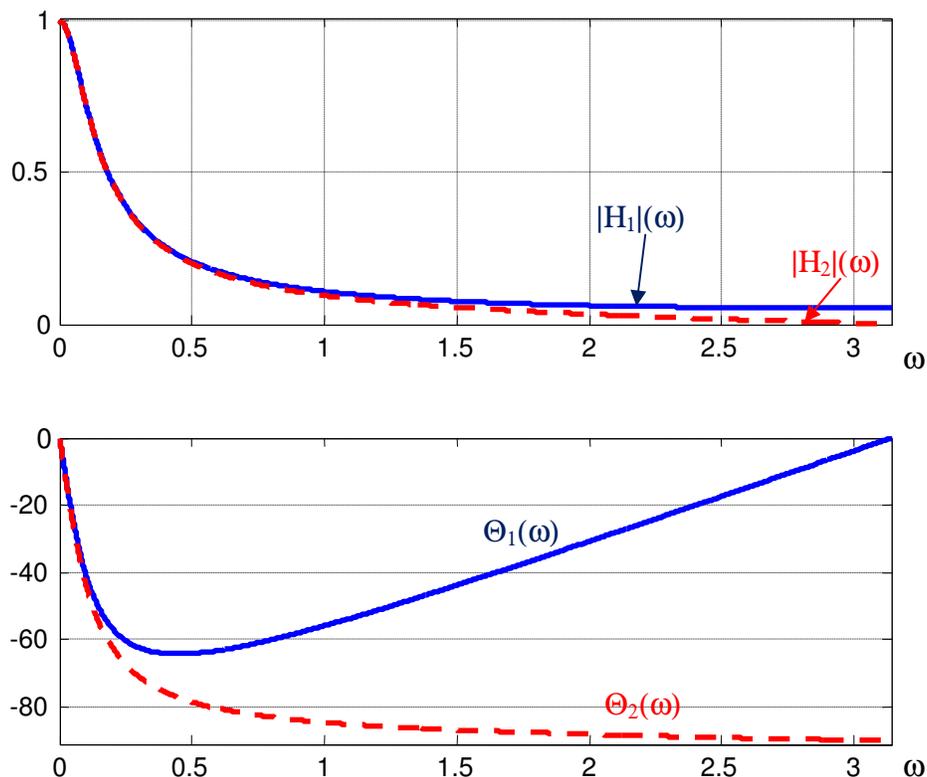
Tiene el comportamiento de un filtro pasa bajas. Su función de transferencia está dada por:

$$H_1(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} \quad (4.64)$$

De donde se observa que tiene un polo en  $z = a = 0.9$  y un cero en  $z = 0$ , con lo cual su diagrama de polos y ceros corresponde a la esquina superior izquierda de la figura 4.19. Como puede verse, se las frecuencias altas no son completamente atenuadas, esto se puede mejorar agregando un cero en  $z = -1$  obteniendo un nuevo filtro como sigue

$$H_2(z) = \frac{b(1+z^{-1})}{2(1-az^{-1})} \quad (4.65)$$

Donde el factor de  $\frac{1}{2}$  se ha agregado para lograr una ganancia de 1 en la banda de paso es decir de manera que  $H(\omega_0) = 1$ , con  $\omega_0 = 0$ . En la figura 4.22 se muestran las respuestas de frecuencia de ambos filtros.



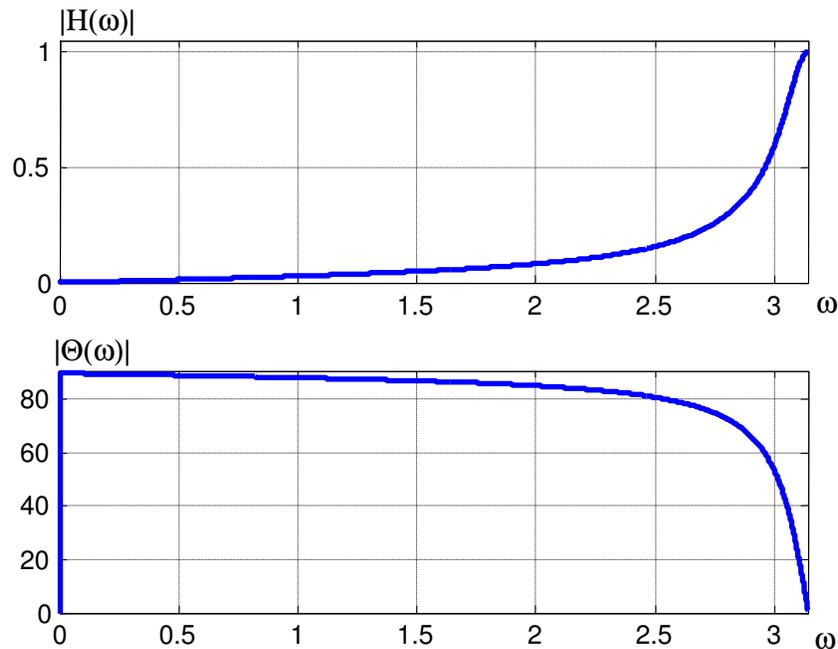
**Figura 4.22.-** Respuesta de frecuencia de un filtro pasa bajas de primer orden con un cero en el origen y con un cero en -1.

☞ **Observación:** La diferencia entre el comportamiento de  $|H_1(\omega)|$  y  $|H_2(\omega)|$  no parece ser muy significativo en la escala utilizada, sin embargo, en la práctica es más representativo usar una escala logarítmica para la ganancia del filtro, por ello en lugar  $|H(\omega)|$  se suele representar  $|H(\omega)|_{db} = 20\log(|H(\omega)|)$  (**Diagrama de Bode**), en este tipo de escala la diferencia a altas frecuencias de la figura 4.22 es mucho más notoria.

En forma similar se puede obtener un filtro pasa altas simplemente reflejando respecto al eje imaginario las ubicaciones de polos y ceros en el plano Z, es decir, simplemente se cambia  $z$  por  $-z$  en las funciones transferencia anteriores. Para el caso de  $H_2(z)$  obtenemos

$$H_3(z) = \frac{b}{2} \frac{1 - z^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad (4.66)$$

El cual tiene la respuesta de frecuencia mostrada en la figura 4.23.



**Figura 4.23.-** Respuesta de frecuencia del filtro pasa altas  $H_3$ .

En el caso de un filtro pasa banda, la función transferencia deberá contener uno o más pares de polos conjugados complejos cerca del círculo unitario en la vecindad de las frecuencias que constituyen la banda de paso del filtro.

**Ejemplo.** Diseñar un filtro pasa banda que tenga el centro de su banda de paso centrada en  $\omega = \pi/2$ , que tenga ganancia cero en  $\omega = 0$  y en  $\omega = \pi$  y ganancia de  $1/\sqrt{2}$  en  $\omega = 4\pi/9$ .

**Solución.** Claramente el filtro deberá tener polos en  $z = p_{1,2} = re^{\pm j\pi/2}$ , es decir,  $p_1 = jr$ ,  $p_2 = -jr$  (con  $r < 1$ ) y deberá tener ceros en  $z = 1$  y en  $z = -1$ . Es decir, la Función transferencia del filtro será

$$H(z) = K \frac{(z-1)(z+1)}{(z-jr)(z+jr)} = K \frac{z^2 - 1}{z^2 + r^2}$$

El factor de ganancia  $K$  se determinará de la condición de ganancia en la banda de paso  $|H(\frac{\pi}{2})| = 1$ , obteniendo:

$$\left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|K \frac{-2}{-1+r^2}\right| = K \frac{2}{|1-r^2|} = 1$$

De donde

$$K = \frac{1-r^2}{2}$$

El valor de  $r$  puede determinarse de la condición  $|H(\frac{4\pi}{9})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , para ello evaluamos

$$\left|H\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right|^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4} \frac{|e^{j8\pi/9} - 1|^2}{|e^{j8\pi/9} + r^2|^2} = \frac{1}{2}$$

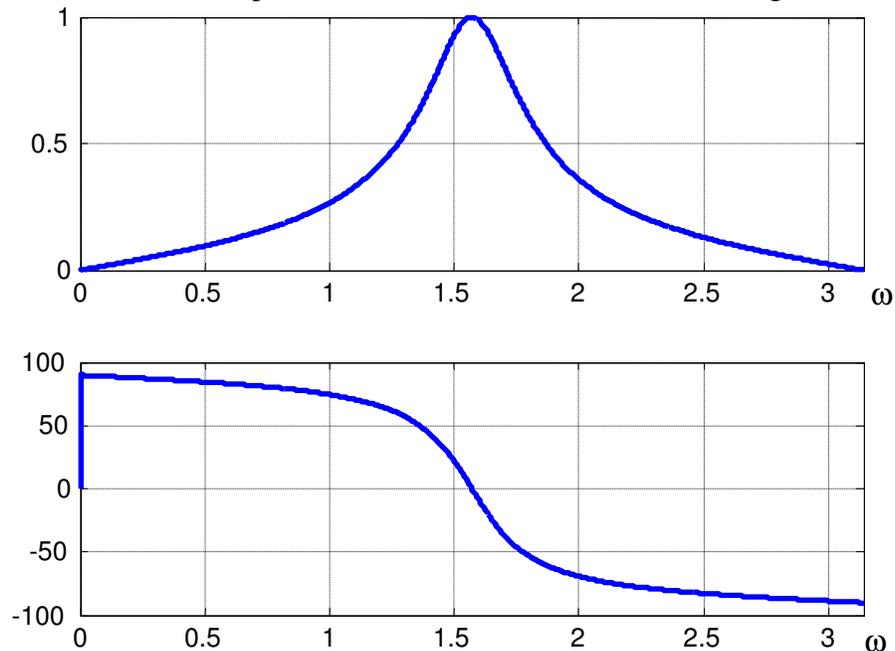
De donde

$$1.94(1-r^2)^2 = 1 - 1.88r^2 + r^4$$

De donde se obtiene el valor de  $r^2 = 0.7$ , por lo tanto, la función transferencia del filtro queda

$$H_4(z) = 0.15 \frac{1-z^{-2}}{1+0.7z^{-2}} \quad (4.67)$$

La respuesta de frecuencia correspondiente a este filtro se muestra en la figura 4.24.



**Figura 4.24.** Respuesta de frecuencia del filtro pasa banda (4.67).

#### 4.6.4.- Resonadores digitales.

Los filtros pasa banda pueden ser interpretados como resonadores, ya que tienen una magnitud de respuesta muy grande (resuenan) a una frecuencia específica (el centro de la banda de paso). En el diseño de un resonador debemos especificar la frecuencia de resonancia  $\omega_r$ , la cual será cercana a  $\omega_0$  que define los polos conjugados complejos del resonador en

$$p_1 = re^{j\omega_0}, p_2 = re^{-j\omega_0}$$

Adicionalmente podemos ubicar hasta dos ceros en la función de transferencia del resonador, los cuales pueden ser ambos en cero, con lo cual la función de transferencia del resonador puede ser la siguiente

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})} \quad (4.68)$$

Es decir,

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - (2r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (4.69)$$

Calculando el mínimo del denominador de (4.68) se puede demostrar que  $|H(\omega)|$  tiene su valor máximo para la frecuencia de resonancia

$$\omega_r = \cos^{-1} \left( \frac{1+r^2}{2r} \cos \omega_0 \right) \quad (4.70)$$

Obsérvese que para  $r \approx 1$  se tiene que  $\omega_r \approx \omega_0$ . Además, conforme el valor de  $r$  se acerca a 1, el pico de resonancia se vuelve más agudo. Una medida de la agudeza del pico está dada por el ancho de bando correspondiente a 3 decibeles (el rango de frecuencias en el cual  $|H(\omega)|_{db} > -3db$  o bien  $|H(\omega)| > 0.7071$ ) el cual para  $r \approx 1$  está dado por

$$\Delta\omega \approx 2(1-r) \quad (4.71)$$

Como  $|H(\omega)|$  tiene su pico cerca de  $\omega_0$ , diseñaremos  $b_0$  de manera que  $|H(\omega_0)| = 1$ , es decir, tomando en cuenta (4.68)

$$H(\omega) = \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0} e^{-j\omega})(1 - re^{-j\omega_0} e^{-j\omega})} \quad (4.72)$$

Es decir, para  $\omega = \omega_0$

$$H(\omega_0) = \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0} e^{-j\omega_0})(1 - re^{-j\omega_0} e^{-j\omega_0})} = \frac{b_0}{(1-r)(1-re^{-2j\omega_0})} \quad (4.73)$$

Así, para cumplir con  $|H(\omega_0)| = 1$  se requiere que

$$b_0 = (1-r)\sqrt{1+r^2-2r\cos(2\omega_0)} \quad (4.74)$$

**Ejemplo.** Diseñar un resonador para la frecuencia  $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$  con  $r=0.8$  y compararlo con otro resonador con  $r=0.95$ .

**Solución.** El coeficiente  $b_0$  correspondiente en cada caso es:

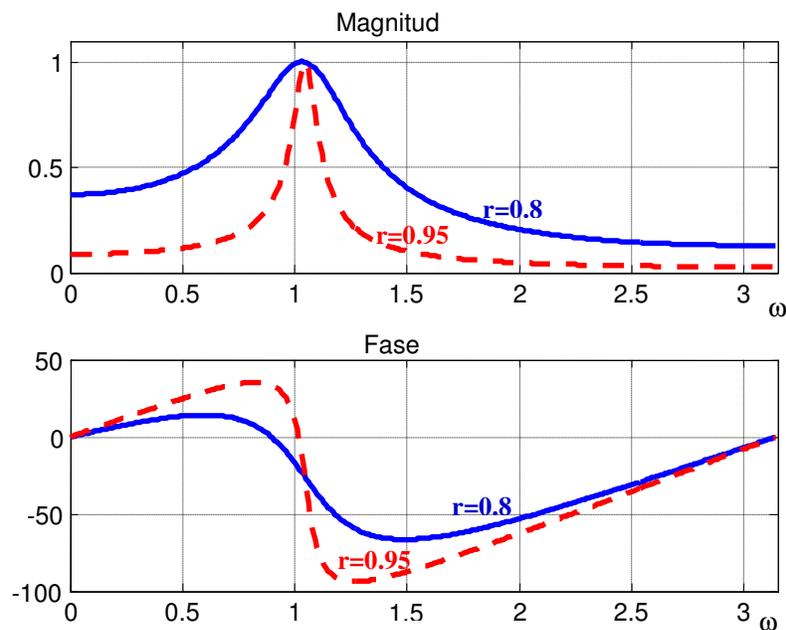
$$\text{Para } r=0.8: b_0 = (1-0.8)\sqrt{1+(0.8)^2-2(0.8)\cos(2\pi/3)} = 0.3124$$

$$\text{Para } r=0.95: b_0 = (1-0.95)\sqrt{1+(0.95)^2-2(0.95)\cos(2\pi/3)} = 0.0844$$

Entonces la función transferencia del filtro es la siguiente

$$H(z) = \frac{b_0}{1-rz^{-1}+r^2z^{-2}}$$

En la figura 4.25 se muestra la respuesta de frecuencia de los dos resonadores diseñados.



**Figura 4.25.** Respuesta a la frecuencia del resonador para  $r=0.8$  y para  $r=0.95$

Otra manera de elegir los ceros es: uno en  $z=1$  ( $\omega=0$ ) y el otro en  $z=-1$  ( $\omega=\pi$ ). Con lo cual la función transferencia del resonador queda

$$H(z) = \frac{b_0(1-z^{-2})}{1-rz^{-1}+r^2z^{-2}}$$

Debido a la presencia de los ceros, la magnitud y la fase del resonador se modifican. Como la magnitud del factor agregado en el numerador es

$$|1 - e^{-2j\omega}| = \sqrt{2(1 - \cos(2\omega))}$$

Por lo cual el coeficiente  $b_0$  deberá corregirse dividiendo entre esta cantidad, con lo cual se obtiene:

$$\text{Para } r=0.8: b_0 = 0.3124 / \sqrt{2(1 - \cos(2\pi/3))} = 0.18036$$

$$\text{Para } r=0.98: b_0 = 0.0844 / \sqrt{2(1 - \cos(2\pi/3))} = 0.04873$$

En la figura 4.26 se muestra la respuesta de frecuencia de estos dos resonadores con los ceros agregados. Obsérvese que la presencia de los ceros hace que la frecuencia de resonancia se modifique de manera insignificante pero el ancho de banda se ve disminuido apreciablemente.

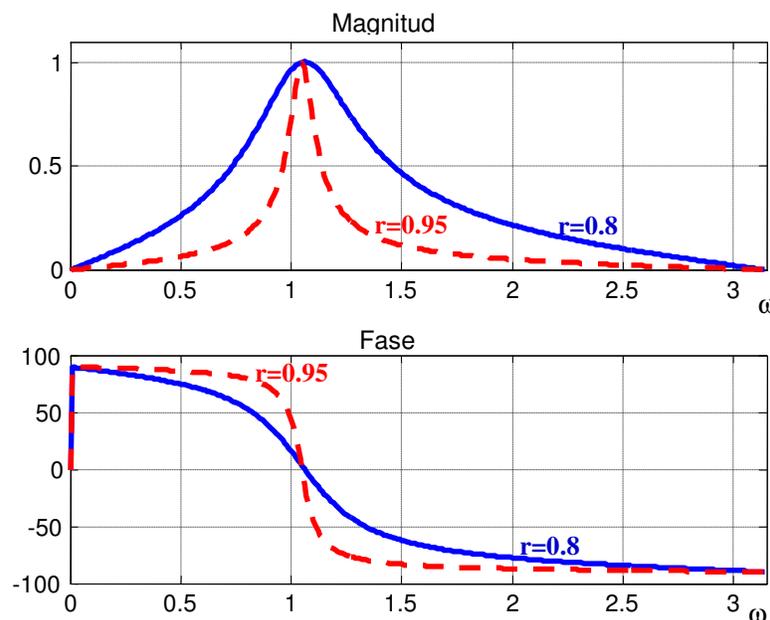


Figura 4.26. Respuesta de frecuencia del resonador con ceros en  $z = \pm 1$

#### 4.6.5.- Filtros tipo muesca (rechaza banda).

Un filtro tipo muesca o rechaza banda contiene una o varias muescas en su grafica de respuesta de frecuencia. Son muy útiles en situaciones en las que se requiere eliminar componentes específicas de frecuencia, por ejemplo, en sistemas de instrumentación es necesario eliminar la frecuencia de la línea de alimentación de 60 Hertz así como sus armónicos.

Para crear una muesca (rechazo) en la frecuencia específica  $\omega_0$  simplemente se introduce un par de ceros complejos conjugados sobre el círculo unitario en un ángulo  $\omega_0$ , es decir

$$z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$$

De esta manera la función de transferencia de un filtro muesca es simplemente

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}) \\ &= b_0(1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}) \end{aligned} \quad (4.75)$$

La cual corresponde a un filtro tipo FIR.

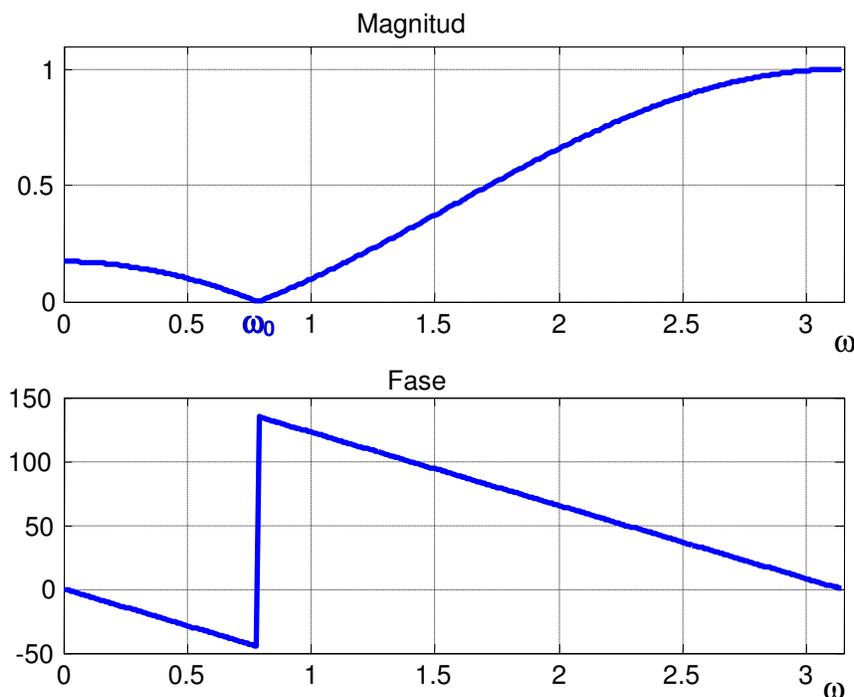
**Ejemplo:** Para diseñar un filtro muesca con  $\omega_0 = \pi/4$ , solo debemos elegir  $b_0$  de manera que  $|H(\omega)|_{\omega=\pi} = |H(z)|_{z=-1} = 1$ , sustituyendo en (4.75) obtenemos

$$|H(1)| = b_0 |2 + 2 \cos \omega_0| = b_0 |2 + 2 \cos \frac{\pi}{4}| = (2 + \sqrt{2})b_0 = 1$$

Es decir,  $b_0 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = 0.2929$ , con lo cual la función de transferencia del filtro es la siguiente

$$H(z) = 0.2929(1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2})$$

En la figura 4.27 se muestra la respuesta de frecuencia de este filtro muesca



**Figura 4.27.** Respuesta de frecuencia del filtro muesca con  $\omega_0 = \pi/4$

El filtro muesca FIR dado por (4.75) tiene el problema de que la muesca presenta un ancho de banda demasiado grande, lo cual resulta en una severa atenuación de las frecuencias cercanas a la frecuencia no deseada. Una manera de mejorar el ancho de banda es introduciendo polos que produzcan resonancia en las cercanías de las frecuencias atenuadas, así, para el ejemplo se pueden introducir los polos complejos conjugados

$$p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$$

Entonces la Función de transferencia resultante es

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

**Ejemplo:** Introduciendo polos al ejemplo anterior, debemos recalculer  $b_0$  de manera que  $|H(\omega)|_{\omega=\pi} = |H(z)|_{z=-1} = 1$ , es decir,

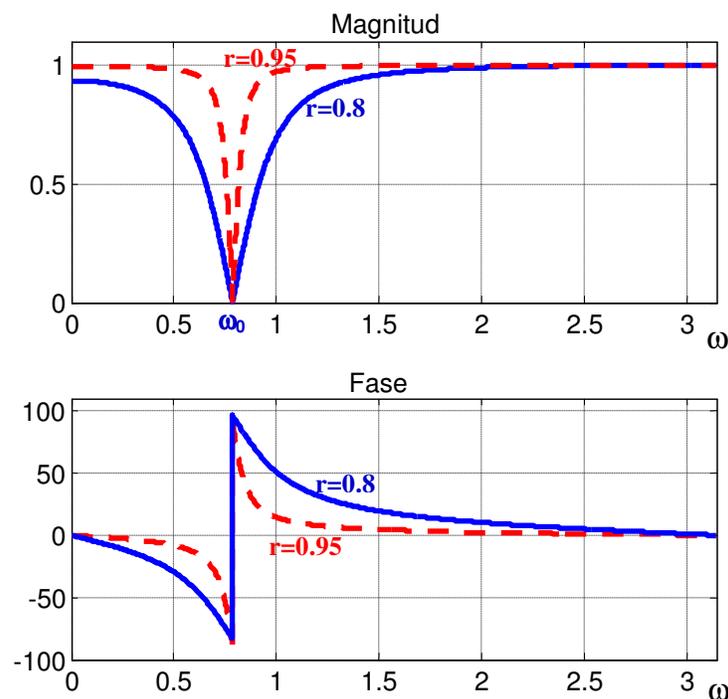
$$|H(-1)| = b_0 \left| \frac{2 + 2 \cos \omega_0}{1 + 2r \cos \omega_0 + r^2} \right| = 1$$

De donde obtenemos

$$b_0 = \left| \frac{1 + 2r \cos \omega_0 + r^2}{2 + 2 \cos \omega_0} \right|$$

Para  $\omega_0 = \pi/4$ , probaremos dos valores de  $r$ : Para  $r=0.8$ , se obtiene  $b_0 = 0.8117$ , y para  $r=0.95$  se obtiene  $b_0 = 0.95$

En la figura 4.28 se muestra la respuesta de frecuencia de estos dos filtros considerando los polos descritos.



**Figura 4.28.** Respuesta de frecuencia del filtro muesca incluyendo dos polos en  $\omega_0 = \pi/4$

#### 4.6.6.- Osciladores sinusoidales digitales.

Un oscilador digital sinusoidal puede verse como una forma extrema de un resonador de dos polos para el cual los polos complejos conjugados están exactamente en el círculo unitario.

Reconsideremos la función de transferencia de un sistema de segundo orden con polos en  $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$ , la cual tiene la forma siguiente (ver ecuación (4.69))

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (4.76)$$

Donde

$$a_1 = -2r \cos \omega_0, \quad a_2 = r^2 \quad (4.77)$$

La respuesta al impulso de este sistema se obtiene como la solución homogénea correspondiente a las condiciones iniciales  $y(-1) = 0$ ,  $y(0) = b_0$ , la cual es  $h(n) = c_1 p_1^n + c_2 p_2^n$ , sustituyendo las condiciones iniciales se obtiene:

$$h(n) = \frac{b_0 r^n}{\sin \omega_0} \sin[(n+1)\omega_0] u(n) \quad (4.78)$$

La cual para  $r < 1$  es una senoide amortiguada, sin embargo, si consideramos los polos en el círculo unitario ( $r=1$ ) y elegimos  $b_0 = A \sin \omega_0$ , obtenemos

$$h(n) = A \sin[(n+1)\omega_0] u(n) \quad (4.79)$$

La cual es una senoide pura de frecuencia  $\omega_0$ .

Es decir, para construir un oscilador digital que produzca la señal (4.79), se deberá implementar la función de transferencia

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + z^{-2}} \quad (4.80)$$

Donde  $a_1 = -2 \cos \omega_0$ ,  $b_0 = A \sin \omega_0$

La ecuación de diferencias correspondiente a la función de transferencia (4.80) es

$$y(n) + a_1 y(n-1) + y(n-2) = b_0 \delta(n) \quad (4.81)$$

La cual se puede implementar como una ecuación de diferencias sin entrada, reemplazando el efecto del impulso unitario por las condiciones iniciales correspondientes  $y(-1) = 0$ ,  $y(0) = b_0$ , o bien,  $y(-1) = 0$ ,  $y(-2) = -b_0$ .

**Ejemplo:** ¿Representa un oscilador la siguiente función de transferencia? ¿Cuál es la senoide que genera con las condiciones iniciales  $y(-1) = 0$ ,  $y(-2) = -b_0$ ?

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.25z^{-1} + z^{-2}}$$

**Solución.** Veamos si  $H(z)$  tiene la forma (4.80), para ello veamos si se puede satisfacer para algún valor de  $A$  y de  $\omega_0$ :

$$a_1 = -2 \cos \omega_0 = -0.25,$$

$$b_0 = A \sin \omega_0 = 1$$

De donde se obtiene:  $\omega_0 = 1.4455$ ,  $A = 1.0079$ , por lo tanto, la señal generada con las condiciones iniciales dadas es  $y(n) = 1.0079 \sin[(n+1)1.4455]u(n)$ .

En la figura 4.29 se muestra la respuesta del sistema  $H(z)$  al impulso unitario y superpuesta se muestra también la señal  $y(t) = 1.0079 \sin[(t+1)1.4455]u(t)$  con una variación de  $t$  aproximadamente continua con la finalidad de comprobar que en efecto la señal generada por el sistema  $H(z)$  corresponde a la sinusoides predicha.

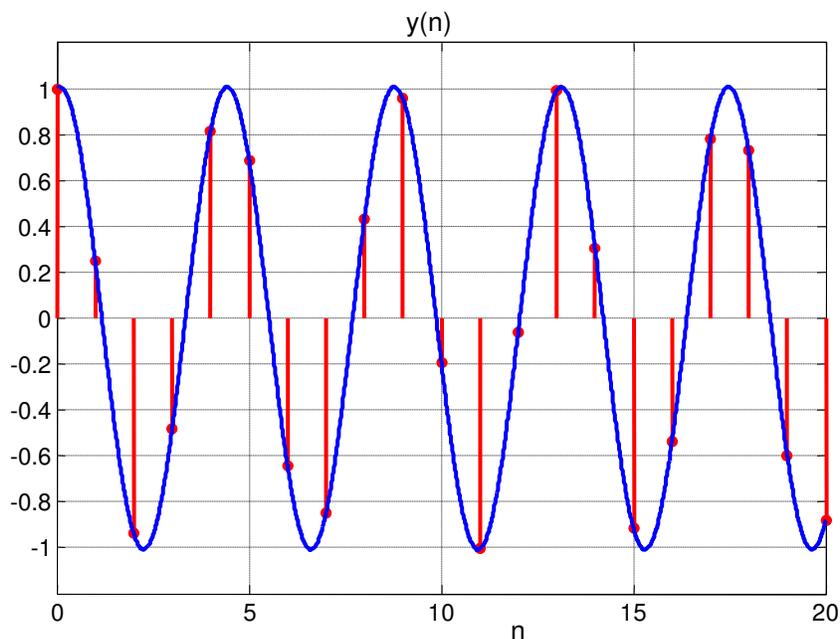


Figura 4.29. Respuesta del oscilador digital superpuesta con la sinusoides esperada.

#### 4.6.7.- Filtros pasa todo.

Un filtro pasa todo es un sistema que no afecta la magnitud de la señal de entrada, para ningún rango de frecuencia, es decir, es tal que su función de transferencia cumple con

$$|H(\omega)| = 1 \text{ para } 0 \leq \omega \leq \pi \quad (4.82)$$

En otras palabras, un filtro pasa todo solamente afecta la fase de la señal de entrada. Por ejemplo el caso más sencillo de filtro pasa todo es un retardo de  $k$  muestras:

$$H(z) = z^{-k}$$

El no modifica la señal de entrada salvo por un retardo de  $k$  muestras. Este sistema introduce una fase que varía en forma lineal respecto a la frecuencia.

Sin embargo, un filtro pasa todo más interesante tiene la función transferencia siguiente

$$H(z) = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)} \tag{4.83}$$

Donde

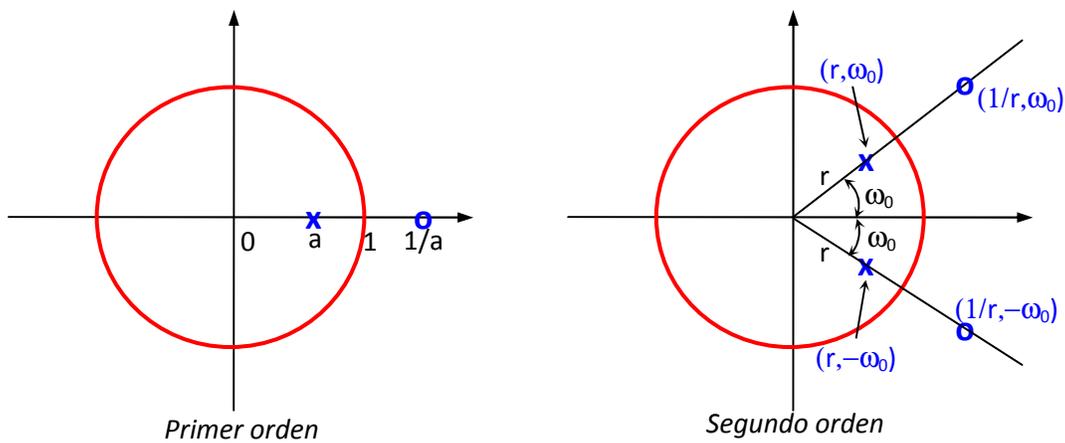
$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N} \tag{4.84}$$

El cual en efecto cumple la condición (4.82), puesto que

$$|H(\omega)|^2 = H(z)H^*(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} = 1$$

La función de transferencia (4.83) implica que si  $z_0$  es un cero de  $H(z)$ , entonces necesariamente  $1/z_0$  será un polo de  $H(z)$ , es decir, los polos y los ceros son recíprocos unos de otros.

En la figura 4.30 se muestran dos ejemplos de ubicaciones de polos y ceros para un filtro pasa todo.



**Figura 4.30.** Ubicaciones de polos y ceros para un filtro pasa todo de primero y segundo orden.

**Ejemplo:** De acuerdo a la figura 4.30 y a la función de transferencia (4.83), los siguientes son filtros pasa todo:

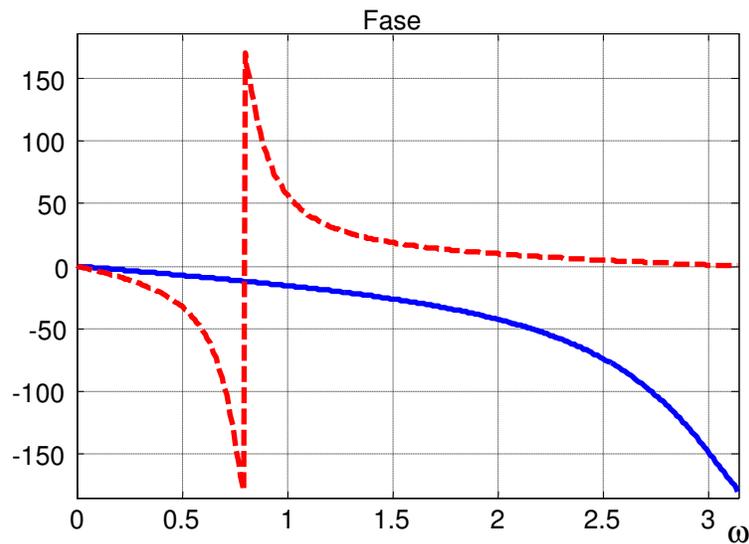
De primer orden:

$$H(z) = z^{-1} \frac{1 + az}{1 + az^{-1}} = \frac{a + z^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

De segundo orden:

$$H(z) = z^{-2} \frac{(1 - re^{j\omega_0} z)(1 + re^{-j\omega_0} z)}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 + re^{-j\omega_0} z^{-1})} = z^{-2} \frac{1 - 2r \cos \omega_0 z + r^2 z^2}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} = \frac{r^2 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

En la figura 4.31 se muestra la respuesta de frecuencia de ambos filtros para el caso  $a=0.6$ ,  $r=0.9$ ,  $\omega_0 = \pi / 4$ .



**Figura 4.31.** Corrimiento de fase respecto a la frecuencia de los filtros pasa todo de primero y segundo orden para  $a=0.6$ ,  $r=0.9$ ,  $\omega_0 = \pi / 4$

Obsérvese que en la figura 4.31 solo se muestra el comportamiento de la fase, ya que la magnitud permanece constante (unitaria) para cualquier rango de frecuencia. Obsérvese también que el rango de valores de fase se ha restringido a  $-180^\circ \leq \Theta(\omega) \leq 180^\circ$ , o equivalentemente en radianes a  $-\pi \leq \Theta(\omega) \leq \pi$ , debido a esto se tiene un *aparente* salto brusco en  $\omega = \omega_0 = \pi / 4 = 0.7854$ .

# Capítulo 5.

## La Transformada Discreta de Fourier

Para realizar el análisis de frecuencia de una señal discreta  $x(n)$ , se convierte la secuencia de sus valores en el tiempo a una representación equivalente en el dominio de la frecuencia. Tal representación es proporcionada por la Transformada de Fourier  $X(\omega)$  de la secuencia  $x(n)$ . Sin embargo,  $X(\omega)$  es una función continua respecto a  $\omega$ , lo cual resulta una representación computacionalmente inconveniente de la secuencia  $x(n)$ .

En este capítulo se considerará la representación de la secuencia  $x(n)$  mediante muestras de su espectro  $X(\omega)$ , esta representación en el dominio de la frecuencia nos conduce a la Transformada Discreta de Fourier (DFT), la cual es una poderosa herramienta computacional para realizar análisis de frecuencia de señales discretas.

### 5.1.- Muestreo en el Dominio de la Frecuencia.

Antes de introducir la DFT consideraremos el muestreo de la Transformada de Fourier de una señal discreta no periódica  $x(n)$ . La Transformada de Fourier (DTFT) correspondiente es:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (5.1)$$

A continuación tomaremos muestras de  $X(\omega)$  para  $N$  frecuencias equidistantes distribuidas en el intervalo  $0 \leq \omega < 2\pi$  con un espaciamiento entre ellas de  $\delta\omega = 2\pi/N$ , es decir,

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.2)$$

La sumatoria anterior puede subdividirse en una infinidad de sumas finitas como sigue

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \dots$$

es decir,

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

Cambiando el índice  $n$  de la sumatoria interna por  $n-lN$  obtenemos

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x(n-lN)e^{-j2\pi kn/N} e^{j2\pi kl}$$

pero como  $e^{j2\pi kl} = 1$ , intercambiando el orden de las sumatorias obtenemos

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.3)$$

donde la señal

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \quad (5.4)$$

se denomina *extensión periódica de  $x(n)$*  y consiste en la repetición de la secuencia  $x(n)$  cada  $N$  muestras.

La señal  $x_p(n)$  es evidentemente periódica de período  $N$ , por lo tanto admite una expansión en serie de Fourier de la forma

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \tag{5.5}$$

con coeficientes de Fourier dados por

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \tag{5.6}$$

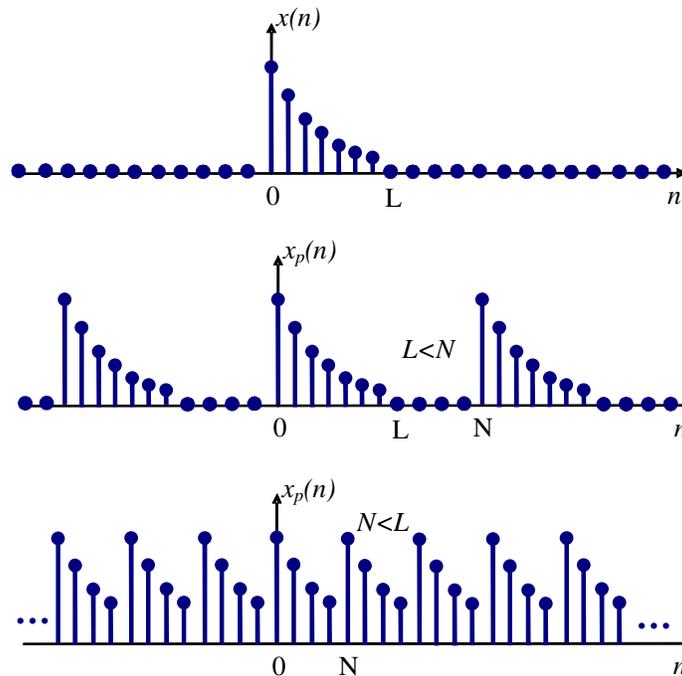
Si comparamos (5.6) con (5.3) concluimos que

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \tag{5.7}$$

Sustituyendo en (5.5) obtenemos

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \tag{5.8}$$

La relación anterior provee una manera de reconstruir la señal  $x_p(n)$  a partir de  $N$  muestras del espectro  $X(\omega)$ . Sin embargo, esto no garantiza que siempre sea posible recuperar  $x(n)$  o  $X(\omega)$  a partir de dichas muestras. En la figura 5.1 se muestra como puede perderse información en una señal de duración finita  $L$  en el caso en que  $N < L$ , a esta situación se le denomina *distorsión* en el dominio del tiempo (*time aliasing*).



**Figura 5.1.** Secuencia periódica  $x(n)$  de longitud  $L$  y su extensión periódica  $x_p(n)$  para  $L \leq N$  (no aliasing) y para el caso  $N < L$  (aliasing).

De la figura 5.1 resulta claro que  $x(n)$  puede ser recuperada de  $x_p(n)$  si no hay aliasing en el dominio del tiempo, es decir, si  $L \leq N$ , ya que en ese caso

$$x(n) = x_p(n) \text{ para } 0 \leq n \leq N-1$$

En el caso de que la señal  $x(n)$  sea de duración infinita no hay manera de evitar el error por aliasing en el dominio del tiempo, sin embargo, si es posible elegir un valor grande de  $N$  el error puede ser casi imperceptible. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo

**Ejemplo:** Calcular el espectro de la siguiente señal exponencial muestreado en las frecuencias  $\omega_k = 2\pi k / N$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Considérese  $a=0.8$ , en el caso  $N=5$  y luego en el caso  $N=50$ .

$$x(n) = a^n u(n) \text{ con } 0 < a < 1$$

**Solución.**

La Transformada de Fourier de la secuencia  $x(n)$  es

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{j\omega}}$$

Por lo tanto, el espectro muestreado en las  $N$  frecuencias consideradas será

$$X(\omega_k) = X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \frac{1}{1 - ae^{j2\pi k/N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

sin embargo, la secuencia periódica correspondiente al las muestras de frecuencia anteriores estará dado por

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) = \sum_{l=-\infty}^0 a^{n-lN} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

es decir,

$$x_p(n) = a^n \sum_{l=-\infty}^0 a^{lN} = \frac{a^n}{1 - a^N} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

La cual no corresponde de manera exacta a la secuencia original, ya que incluye el error  $\frac{1}{1 - a^N}$  por efecto de *distorsión* o *aliasing*. Como  $0 < a < 1$ , este error tiende a cero conforme  $N \rightarrow \infty$ . Por ejemplo, para  $a=0.8$ , con  $N=5$  este error introduce el factor 1.487 (error del 48.7%), en cambio, con  $N=50$ , dicho factor es de 1.000014, (error prácticamente imperceptible).

## 5.2. Definición de la Transformada Discreta de Fourier.

De acuerdo al análisis de la sección anterior, las  $N$  muestras igualmente espaciadas  $X(2\pi k / N)$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , no representan de manera única a la secuencia  $x(n)$  cuando esta tiene duración infinita, en general más bien esas muestras corresponden a la secuencia periódica  $x_p(n)$  la cual es una versión *distorsionada* de  $x(n)$  dada por

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \quad (5.9)$$

En cambio, si  $x(n)$  es una secuencia de duración finita  $L \leq N$ , la expresión anterior define  $x_p(n)$  como una versión periódica de  $x(n)$ . Donde  $x_p(n)$  sobre un solo periodo está dada por

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & L \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (5.10)$$

es decir, sobre un solo periodo  $x_p(n)$  es idéntica a las  $L$  muestras no nulas de  $x(n)$  completadas con  $N-L$  ceros.

Las  $L$  muestras no nulas de  $x(n)$  son suficientes para calcular  $L$  muestras exactas de  $X(\omega)$ , de manera que los  $N-L$  ceros adicionales sólo resultan en una mayor resolución del espectro obtenido.

Las  $N$  muestras del espectro de  $x(n)$  están dadas por

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.11)$$

Como estas muestras son obtenidas evaluando la Transformada de Fourier  $X(\omega)$  en  $N$  valores discretos de frecuencia igualmente espaciados, a la relación (5.11) se le llama la *Transformada Discreta de Fourier* (DFT) de  $x(n)$ .

Además, tomando en cuenta (5.8), podemos reconstruir la secuencia  $x(n)$  a partir de las muestras (5.11) en el dominio de la frecuencia como sigue

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.12)$$

La cual es denominada la *Transformada Discreta Inversa de Fourier* (IDFT)

**Ejemplo.** Consideremos la secuencia discreta dada por:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{otro } n \end{cases}$$

Obsérvese que esta secuencia ya se analizó en el capítulo anterior en donde se obtuvo

$$|X(\omega)| = A \left| \frac{\sin(\omega L / 2)}{\sin(\omega / 2)} \right| \quad \text{para } \omega \neq 0, \quad X(0) = AL$$

que para el caso  $A=1$ ,  $L=7$  queda

$$|X(\omega)| = \left| \frac{\sin(3.5\omega)}{\sin(0.5\omega)} \right| \quad \text{para } \omega \neq 0, \quad X(0) = 7$$

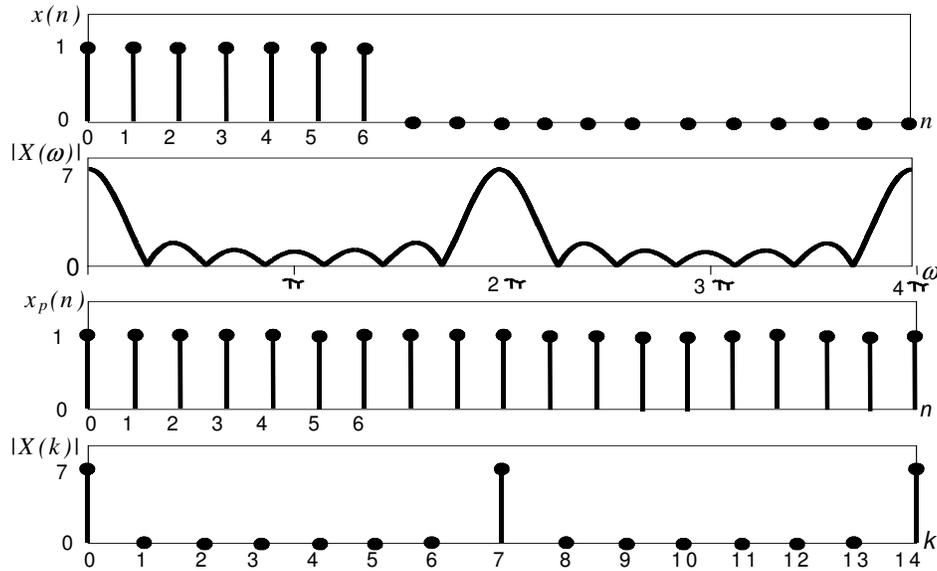
por lo tanto

$$|X(k)| = A \left| \frac{\sin(\pi k L / N)}{\sin(\pi k / N)} \right|, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1, \quad \text{y } X(0) = AL$$

**a) Caso  $N=7$ :** Sustituyendo  $A=1$ ,  $N=7$ , obtenemos

$$|X(k)| = \left| \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k / 7)} \right|, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, 6, \quad \text{y } X(0) = 7$$

En la figura 5.2 se muestran tanto  $x(n)$  como  $x_p(n)$ ,  $|X(\omega)|$  y  $|X(k)|$  para este caso.

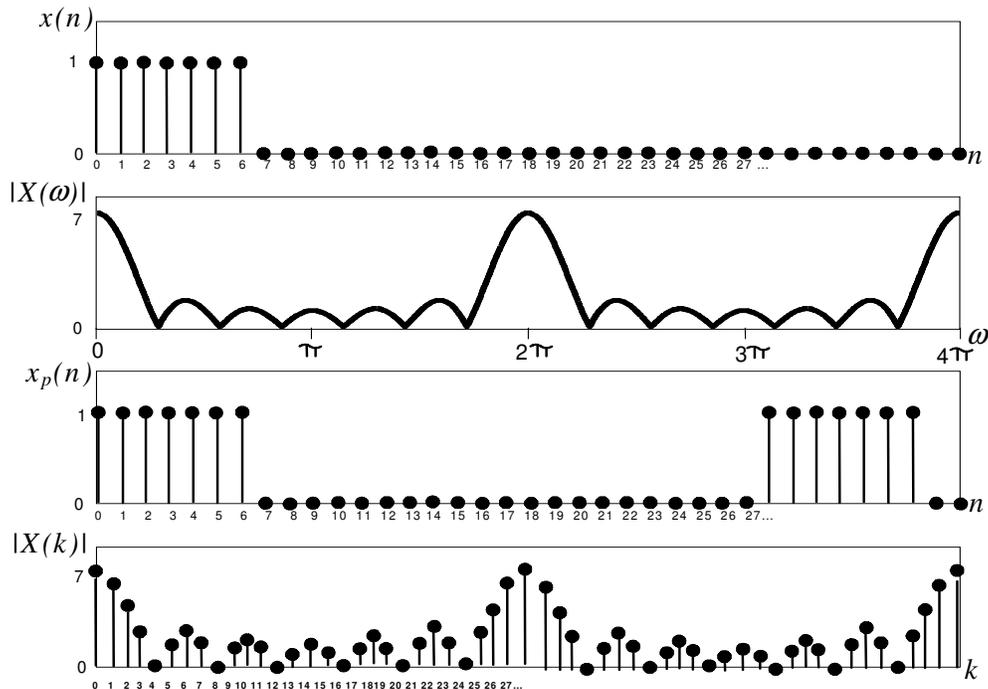


**Figura 5.2** Señal  $x(n)$ , su espectro continuo  $X(\omega)$ , extensión periódica  $x_p(n)$  para  $N=7$  y las correspondientes 7 muestras del espectro  $X(k)$ .

a) **Caso  $N=28$ :** Sustituyendo  $A=1, N=28$ , obtenemos

$$|X(k)| = \left| \frac{\sin(\pi k / 4)}{\sin(\pi k / 28)} \right|, \text{ para } k = 1, 2, \dots, 27, \text{ y } X(0) = 7$$

En la figura 5.3 se muestran tanto  $x(n)$  como  $x_p(n), |X(\omega)|$  y  $|X(k)|$  para este caso.



**Figura 5.3** Señal  $x(n)$ , extensión periódica  $x_p(n)$  rellenando con ceros hasta  $M=28$  y sus espectros.

### 5.3.- La DFT como Matriz de transformación.

Las fórmulas para calcular las Transformadas Discretas de Fourier directa (5.11) e inversa (5.12) pueden ser expresadas respectivamente como sigue

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.13)$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.14)$$

Donde

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \quad (5.15)$$

☞ Obsérvese que  $W_N^N = 1$ , es decir,  $W_N$  es una raíz de orden  $N$  de la unidad.

☞ Obsérvese también que por las propiedades de simetría y periodicidad de la función exponencial, se cumple

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k \quad (5.16)$$

Si denotamos las secuencias  $x(n)$  y  $X(k)$  en forma de vectores columna: Considerando  $N$  puntos, usaremos la siguiente notación:

$$x_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad X_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

con las definiciones anteriores la DFT de  $N$  puntos puede ser expresada como

$$X_N = W_N x_N \quad (5.19)$$

Es decir,  $W_N$  es una matriz de transformación de vectores  $x_N$  de  $N$  puntos en el dominio del tiempo discreto a vectores  $X_N$  de  $N$  puntos en el dominio de la frecuencia discreta.

Obsérvese que la fórmula de la IDFT se puede expresar como

$$x_N = \frac{1}{N} W_N^* X_N \quad (5.20)$$

Es decir,

$$\frac{1}{N} W_N^* W_N = I \quad (5.21)$$

donde  $I$  es la matriz identidad de orden  $N$ , o bien,

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^* \quad (5.22)$$

**Ejemplo:**

Calcular la DFT de la secuencia de cuatro puntos

$$x(n) = \{0, 1, 2, 3\}$$

**Solución:**

El primer paso es formar la matriz  $W_4$ , lo cual se puede realizar de manera más fácil si recordamos la propiedad de simetría y periodicidad (5.16), entonces

$$W_4 = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$X_4 = W_4 x_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2+2j \\ -2 \\ -2-2j \end{bmatrix}$$

**5.4.- Análisis de Frecuencia usando DFT**

Para calcular el contenido de frecuencia de una señal, ya sea analógica o digital se requiere disponer de todos sus valores, sin embargo, en la práctica solo es posible tener un número finito de ellos, esto trae como consecuencia que el espectro de la señal solamente pueda ser aproximado.

Cuando se realiza el análisis de frecuencia de señales analógicas mediante DFT se debe tomar en cuenta primeramente el *ancho de banda* natural de la señal a procesar, por ejemplo, si se trata de una señal de voz a ser transmitida en forma digital por una línea telefónica podemos considerar un ancho de banda de 3000 Hz. Aunque la voz puede contener frecuencias hasta de 4000 Hz, para propósitos de inteligibilidad de la señal es suficiente con 3000 Hz, ya que es demasiado costoso (ancho de banda del canal, número de bits necesarios) procesar las frecuencias muy altas.

Una vez escogido el ancho de banda de las señales a procesar se debe elegir la frecuencia de muestreo  $F_s$  y diseñar un prefiltro o *filtro antialiasing* con el fin de asegurar que la señal a procesar en efecto se mantenga en el ancho de banda considerado y al mismo tiempo lograr que las frecuencias mayores que  $F_s/2$  que generan alias y por lo tanto distorsión sean suficientemente atenuadas. Este filtro antialiasing debe colocarse previo a la conversión analógico a digital para evitar procesar información de señales distorsionadas con contenido de alias de frecuencia como se muestra en la figura 5.4.

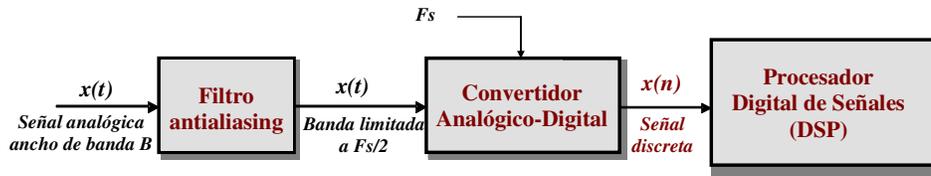


Figura 5.4. Preprocesado de una señal analógica.

En el ejemplo del procesamiento de voz podría elegirse un filtro con banda de paso de 3 KHz, una banda de transición de 400 a 500 Hz y una banda de paro mayor de 3500 Hz, de esta manera si se elige  $F_s=8000$  Hz las frecuencias mayores que  $F_s/2=4000$  Hz quedarán atenuadas.

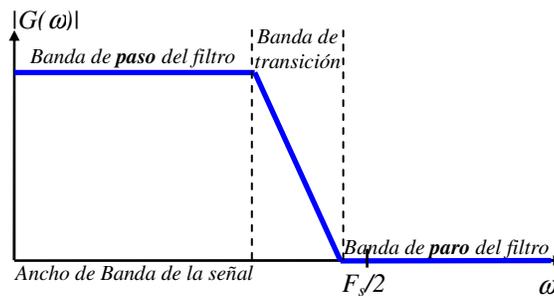


Figura 5.5. Respuesta de frecuencia (Bode) de un filtro antialiasing ideal.

Finalmente, para adquirir la señal nos limitamos a un intervalo de tiempo  $LT$ , donde  $L$  es un entero y  $T$  es el intervalo de muestreo. Este intervalo finito de adquisición nos llevará a un límite en la resolución de frecuencia, como veremos a continuación, no podremos distinguir entre dos frecuencias separadas menos de  $1/T_0=1/LT$ .

Sea  $x(n)$  la señal a analizar, el hecho de limitar la señal a  $L$  muestras equivale a multiplicar la señal por una ventana rectangular  $w(n)$  de ancho  $L$ . Es decir, en lugar de  $x(n)$  tendremos

$$\hat{x}(n) = x(n)w(n) \tag{5.23}$$

donde

$$w(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, 2, \dots, L-1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{5.24}$$

supongamos que la señal consiste en una sola senoide, es decir

$$x(n) = \cos(\omega_0 n) \tag{5.25}$$

es decir,

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) w(n)$$

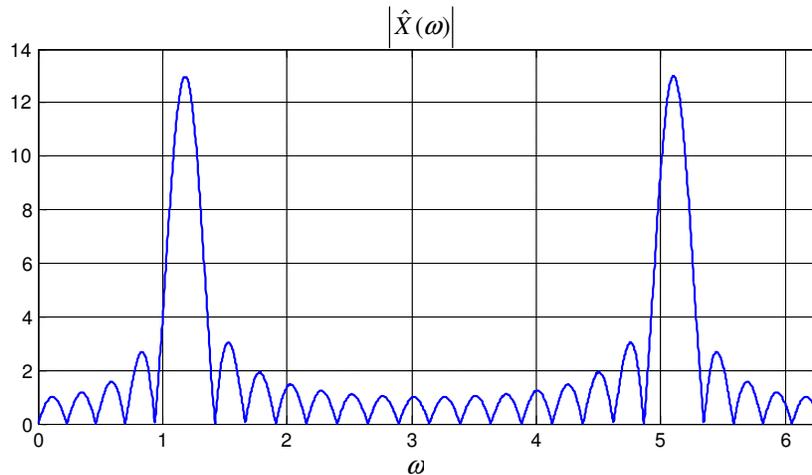
por lo tanto, su correspondiente Transformada de Fourier será

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2} [W(\omega - \omega_0) + W(\omega + \omega_0)] \tag{5.26}$$

donde  $W(\omega)$  es la Transformada de Fourier de  $w(n)$ , es decir,

$$W(\omega) = \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2} \quad (5.27)$$

Para calcular  $\hat{X}(\omega)$  mediante DFT completamos los  $L$  puntos de  $x(n)$  con  $N-L$  ceros y calculamos una DFT de  $N$  puntos. En la figura 5.6 se muestra el resultado para  $\omega_0 = 0.365\pi$ ,  $T=1$ ,  $L=25$ ,  $N=2048$ .



**Figura 5.6.** Espectro de  $x(n) = \cos(\omega_0 n)$  con una ventana de 25 puntos.

Como puede apreciarse de la figura 5.6, el contenido de frecuencia no se concentra en un sólo punto  $\omega_0 = 0.365\pi$  como era de esperarse, en lugar de eso aparece derramado a lo largo de todo el contenido de frecuencia, a este fenómeno provocado por el efecto de la ventana rectangular se le llama efecto de *derrame* (*leakage*).

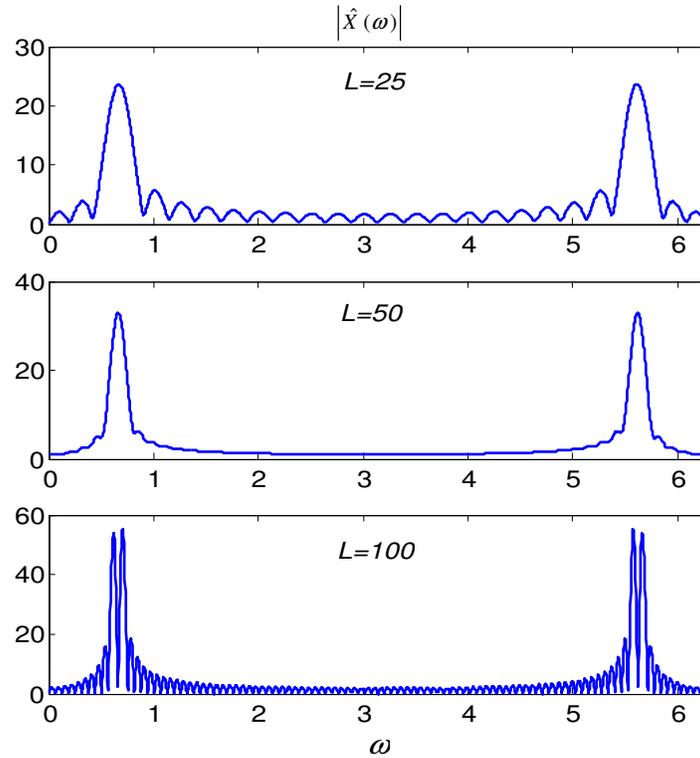
El efecto de la ventana no se refleja solamente en el derrame, sino que también reduce la resolución del espectro. Consideremos por ejemplo una señal que contiene dos componentes de frecuencia.

$$x(n) = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n) \quad (5.28)$$

Al muestrear  $L$  puntos de la señal y calcular su transformada de Fourier obtendremos

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2} [W(\omega - \omega_1) + W(\omega + \omega_1) + W(\omega - \omega_2) + W(\omega + \omega_2)] \quad (5.29)$$

El ancho de los pulsos del espectro de la ventana rectangular  $W(\omega)$  es de  $2\pi/L$ , por lo tanto, si  $|\omega_2 - \omega_1| < \frac{2\pi}{L}$  los dos espectros  $W(\omega - \omega_1)$  y  $W(\omega - \omega_2)$  se sobrepondrán de manera que no se distinguirá la contribución de uno de la del otro.



**Figura 5.7.** Espectro de  $x(n) = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)$  para diferentes valores de  $L$ .

por lo tanto, solamente cuando  $|\omega_2 - \omega_1| \geq \frac{2\pi}{L}$  podemos esperar distinguibilidad entre la contribución de ambas frecuencias, en otras palabras, la longitud  $L$  limita la resolución de frecuencia del espectro obtenido. En la figura 5.7 se puede observar esta pérdida de resolución para  $\omega_1 = 0.2\pi$ ,  $\omega_2 = 0.22\pi$ . Para poder distinguir estas dos frecuencias en este caso requerimos  $|\omega_2 - \omega_1| \geq \frac{2\pi}{L}$ , es decir,  $0.02\pi \geq \frac{2\pi}{L}$ , o bien,  $L \geq 100$ , lo cual se corrobora en la figura 5.7